CONSTANTIN UDRIȘTE
VALERIA TOMULEANU

GEOMETRIE ANALITICĂ

XI

Conf. univ. dr. Constantin Udriște Prof. Valeria Tomuleanu

MATEMATICĂ

GEOMETRIE ANALITICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A XI-A



Editura Didactică și Pedagogică — București

Capitolul I

CALCUL VECTORIAL

§ 1. Vectori liberi

Un vector liber are trei elemente caracteristice: *direcție*, *sens* și *lungime* (*normă* sau *modul*). Acestea vor fi definite în continuare. Precizăm însă de la început că nu orice entitate descrisă prin „direcție, sens și mărime“ este un vector liber.

Fie A și B două puncte din plan. Segmentul $[AB]$ este bine determinat de extremitățile sale A și B, iar sensul de parcurs pe un asemenea segment este bine determinat de o ordonare a acestor extremități. Aceste observații justifică următoarea:

Definiție. O pereche ordonată (A, B) de puncte din plan se numește segment orientat (vector legat în punctul A) și se notează cu $\overrightarrow{AB}$.

Fie $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat. Punctul A se numește *originea* lui $\overrightarrow{AB}$, iar punctul B se numește *extremitatea* lui $\overrightarrow{AB}$. Dacă $A \neq B$, atunci segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ se reprezintă grafic prin săgeata care unește pe A cu B (fig. I. 1). În cazul cînd $A = B$ se obține ceea ce se numește *segmentul orientat nul* $\overrightarrow{AA}$, care se reprezintă grafic prin punctul A.

Segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ se numesc:

1) *egale*, dacă $A = C$ și $B = D$ (coincid);
2) *opuse*, dacă $A = D$ și $B = C$.

Dreapta determinată de segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ se numește *dreapta suport* a lui $\overrightarrow{AB}$ și se notează cu AB. Această dreaptă este unic determinată numai dacă $A \neq B$; orice dreaptă care trece prin punctul A este dreaptă suport pentru segmentul orientat nul $\overrightarrow{AA}$. Două segmente orientate se numesc *coliniare* dacă dreptele lor suport sînt egale (coincid); două segmente orientate se numesc *paralele* dacă dreptele suport corespunzătoare sînt paralele.

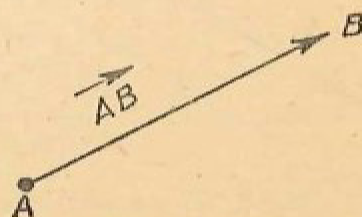


Fig. I. 1.

Direcție

Două drepte d și d' din plan se numesc „egale sau paralele“ dacă $d \subset d'$, $d' \subset d$ (coincid) sau $d \cap d' = \emptyset$ (sînt disjuncte).

Teoremă*. *Relația binară „egale sau paralele“ este o relație de echivalență pe mulțimea dreptelor din plan.*

Demonstrație. Relația „egale sau paralele“ este *reflexivă, simetrică* și *tranzitivă*. Reflexivitatea este totuna cu egalitatea. Simetria rezultă din reflexivitate și din simetria paralelismului între drepte: dacă $d = d'$, atunci și $d' = d$; dacă $d \parallel d'$, atunci și $d' \parallel d$. Tranzitivitatea decurge din faptul că două drepte paralele cu o a treia sînt sau egale sau paralele.

Reamintim că o relație de echivalență definită pe o mulțime determină o împărțire a mulțimii respective în clase de echivalență (submulțimi disjuncte), într-o clasă de echivalență intrînd toate elementele echivalente între ele. În cazul relației „egale sau paralele“ definită pe mulțimea dreptelor din plan, clasele de echivalență se numesc *direcții*. Cu alte cuvinte o *direcție* este o familie de drepte paralele (fig. I. 2), fiecare dreaptă din această familie fiind un *reprezentant* al direcției din care face parte. Astfel „direcția unei drepte“ se utilizează ca sinonim pentru „familia de drepte paralele cu o dreaptă dată“ sau pentru „clasa de echivalență determinată de dreapta respectivă în raport cu relația *egale sau paralele*“.

Un segment orientat nenul $\overrightarrow{AB}$ determină în mod unic dreapta suport AB. De aceea direcția dreptei suport poate fi atașată direct oricărui segment orientat care determină dreapta. Astfel direcția dreptei AB se numește *direcția segmentului orientat nenul* $\overrightarrow{AB}$. Ținînd seama că dreapta suport a unui segment orientat nul nu este unic determinată, admitem că direcția unui asemenea segment este *nedeterminată*.

Definiție. Se spune că două segmente orientate au aceeași direcție dacă:

1) ambele sînt nenule și dreptele lor suport aparțin aceleiași direcții, sau
2) ambele sînt nule.

Teoremă. *Relația binară „aceeași direcție“ pentru segmente orientate este o relație de echivalență pe mulțimea segmentelor orientate.*

Demonstrație. Temă.

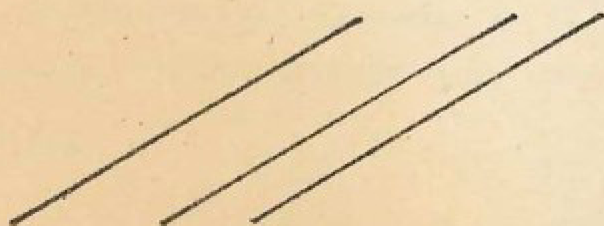


Fig. I. 2

Pentru segmentele orientate nenule *direcțiile* sînt clasele de echivalență ale dreptelor suport relativ la relația „egale sau paralele“. Cu alte cuvinte două segmente orientate nenule au aceeași direcție dacă și numai dacă ele sînt coliniare sau paralele.

---

* Fie E o mulțime oarecare nevidă. Se numește *relație binară* pe E o submulțime a produsului cartezian $E \times E$. O relație binară pe E care este reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește *relație de echivalență* pe E.

Sens

Fie d o dreaptă din plan. Pe dreapta d se pot stabili două și numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor dreptei, consecință a axiomelor de ordine) pe care le vom nota prin săgeți. O dreaptă d împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește *dreaptă orientată* (fig. I. 3).

Definiție. Două segmente orientate nenule coliniare au același sens dacă sensurile de parcurs determinate pe dreapta suport comună coincid.

Două segmente orientate nenule paralele au același sens dacă extremitățile lor se află în același semiplan determinat de dreapta care unește originile segmentelor (fig. I. 4).

Teoremă. *Relația binară „același sens", pentru segmente orientate nenule de aceeași direcție, este o relație de echivalență.*

Demonstrație. Temă.

Două segmente orientate nenule care au același sens au implicit și aceeași direcție. Clasele de echivalență relative la relația „același sens" se numesc *sensuri*. Evident există numai două asemenea clase: *sensul inițial* impus de un segment orientat nenul fixat și *opusul* său. Admitem că sensul unui segment orientat nul este *nedeterminat*.

Familia de drepte paralele cu o dreaptă dată este direcția dreptei respective. O direcție pentru care s-a fixat același sens (de parcurs) pe toate dreptele pe care le conține se numește *direcție orientată* (fig. I. 3). Pentru fixarea unei direcții orientate este suficientă indicarea unui segment orientat nenul pe una dintre dreptele familiei numită direcție.

Lungime

Fie $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat. Prin *lungimea (norma sau modulul)* lui $\overrightarrow{AB}$ înțelegem lungimea segmentului neorientat $[AB]$, adică distanța dintre punctele A și B. Un segment orientat nul are lungimea zero și reciproc orice segment orientat de lungime zero este nul. Două segmente neorientate care au aceeași lungime se numesc *segmente congruente*.

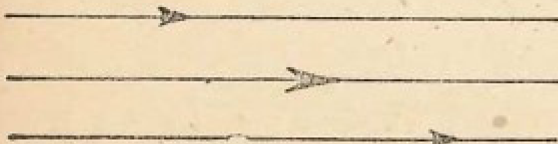


Fig. I. 3

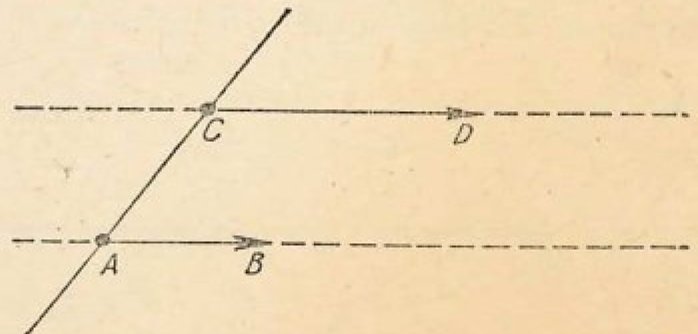


Fig. I. 4

D e f i n i ț i e. Două segmente orientate au aceeași lungime dacă segmentele neorientate corespunzătoare sînt congruente.

T e o r e m ă. *Relația binară „aceeași lungime" pentru segmente orientate este o relație de echivalență.*

Demonstrație. Relația „aceeași lungime" pentru segmente orientate este definită prin relația de congruență pentru segmente neorientate, iar aceasta din urmă este o relație de echivalență.

* * *

Relațiile binare „aceeași direcție", „același sens" și „aceeași lungime" pentru segmentele orientate din plan generează o nouă relație binară pentru segmentele orientate, esențială în definirea noțiunii de vector liber.

D e f i n i ț i e. Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{CD}$, atunci vom scrie $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Temă. Să se demonstreze implicația $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$ (fig. I. 5).

T e o r e m ă. *Relația de echipolență pentru segmente orientate nenule este o relație de echivalență.*

Demonstrație. Relația de echipolență este reflexivă, simetrică și tranzitivă deoarece fiecare dintre relațiile „aceeași direcție", „același sens" și „aceeași lungime" satisfac aceste trei proprietăți.

Prelungim relația de echipolență și la segmentele orientate nule: toate segmentele orientate nule sînt echipolente între ele. Astfel obținem o relație de echipolență pe mulțimea tuturor segmentelor orientate din plan care este o relație de echivalență.

D e f i n i ț i e. Clasele de echivalență ale segmentelor orientate, relative la relația de echipolență, se numesc vectori liberi.

Cu alte cuvinte un *vector liber* este o submulțime a mulțimii tuturor segmentelor orientate care se bucură de proprietățile: (1) este formată din segmente echipolente între ele și (2) conține toate segmentele echipolente cu un segment fixat al său. Fiecare segment orientat din clasa numită vector liber este un *reprezentant* al clasei. Direcția, sensul și lungimea care sînt respectiv comune tuturor segmentelor orientate ce definesc un vector liber se numesc

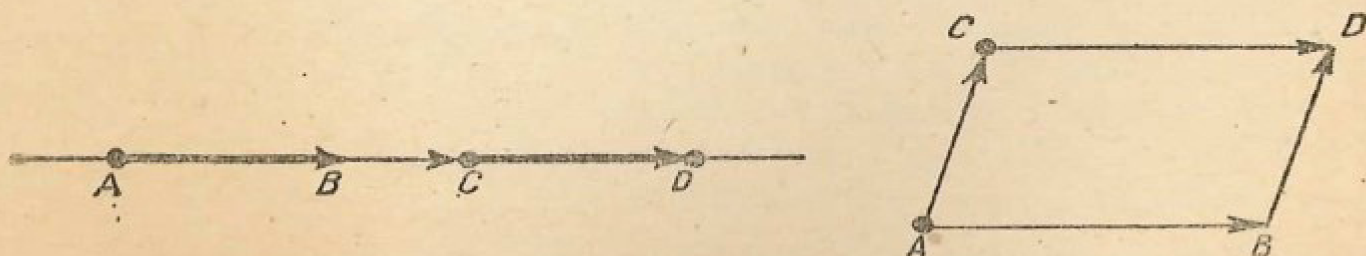


Fig. I. 5

direcția, *sensul* și *lungimea vectorului* liber. Intuitiv vectorul liber poate fi gîndit ca un segment orientat care migrează în plan păstrîndu-și direcția și sensul.

Vectorii liberi se notează cu litere mici cu bară deasupra $\bar{a}$, $\bar{b}$, ..., iar în desen sînt reprezentanți printr-unul dintre segmentele orientate echipolente care definesc clasa numită vector. În contextul reprezentanților vectorii liberi se mai notează și prin $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ...; evident $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$, adică $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al lui $\overline{AB}$.

Presupunem că am fixat o unitate de măsură (etalon) pentru lungimile segmentelor neorientate. În acest caz lungimea unui vector liber va fi dată printr-un număr real pozitiv care reprezintă măsura comună a tuturor segmentelor neorientate corespunzătoare segmentelor orientate din clasa numită vector, în raport cu unitatea de măsură. Notații pentru lungime: $\|\bar{a}\|$, $\|\overline{AB}\|$, $d(A,B)$.

Vectorul liber caracterizat prin faptul că are lungimea zero, iar direcția și sensul sînt nedeterminate se numește *zero* sau *vector nul*. El se notează cu $\bar{0}$ și este reprezentat de orice segment orientat $\overrightarrow{AA}$.

Un vector de lungime unu se numește *versor* sau *vector unitar (unitate)*.

Vectorii liberi care au aceeași direcție se numesc *vectori coliniari*. Vectorul zero este coliniar cu orice alt vector. Reprezentanții vectorilor coliniari sînt segmente orientate coliniare sau paralele. Doi vectori coliniari care au aceeași lungime însă au sensuri opuse se numesc *vectori opuși*. Dacă unul dintre ei este notat cu $\bar{a}$, atunci opusul său este notat cu $-\bar{a}$ (fig. I. 6).

Doi vectori liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt *egali*, și se scrie $\bar{a} = \bar{b}$, dacă reprezentanții lor sînt echipolenți sau, echivalent, dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Notăm planul cu p și mulțimea vectorilor liberi din plan cu V. În p fixăm un punct O pe care îl vom numi *origine*. Oricărui alt punct $M \in p$ îi corespunde un vector liber și numai unul $\overline{OM} \in V$ al cărui reprezentant este segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$. Într-adevăr, dacă $M \neq M'$, atunci $\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{OM'}$ și deci $\overline{OM} \neq \overline{OM'}$. Reciproc, oricărui vector $\bar{r}$ îi corespunde un punct M și numai unul, astfel încît $\overrightarrow{OM}$ să reprezinte pe $\bar{r}$. Vectorul $\overline{OM}$ se numește *vectorul de poziție* al punctului M față de punctul origine O, iar observațiile precedente se rezumă prin teorema următoare.

Teoremă. *Fie O punctul origine. Funcția care asociază fiecărui punct $M \in p$ vectorul său de poziție $\overline{OM} \in V$ este o bijecție între p și V.*

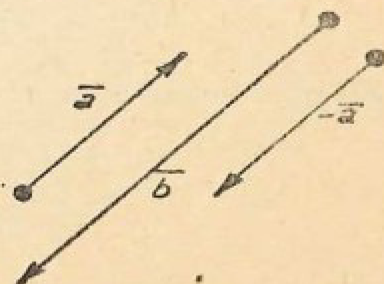


Fig. I. 6

1. Fie O un punct din plan și $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat. Să se figureze:

1) mulțimea C a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au aceeași lungime cu $\overrightarrow{AB}$;

2) mulțimea D a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au aceeași direcție cu $\overrightarrow{AB}$;

3) mulțimea S a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au același sens cu $\overrightarrow{AB}$.

Să se găsească: $C \cup D$, $C \cap D$; $C \cup S$, $C \cap S$; $D \cup S$, $D \cap S$.

2. Fie d o dreaptă și $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat. Să se determine mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe d care au aceeași direcție și aceeași lungime cu $\overrightarrow{AB}$.

Să se formuleze și să se rezolve o problemă analogă pentru cercul de centru O și rază r.

3. Fie O un punct din plan. Să se arate că aplicația care asociază fiecărui vector liber reprezentantul său cu originea O este o bijecție între mulțimea vectorilor liberi și mulțimea segmentelor orientate cu originea O.

§ 2. Adunarea vectorilor

Fie punctele O, A, B și O', A', B'. Dacă $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ și $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, atunci $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$.

Lăsînd pe seama cititorului celelalte cazuri, noi ne vom referi la cazul din figura I. 7 : $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ implică $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{OO'}$, iar $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ implică $\overrightarrow{BB'} \sim \overrightarrow{AA'}$; prin tranzitivitate $\overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{BB'}$ și deci $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$. Această observație stă la baza definiției sumei a doi vectori liberi.

D e f i n i ț i e. Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori liberi. Fie $\overrightarrow{OA}$ un reprezentant al vectorului $\bar{a}$ și $\overrightarrow{AB}$ un reprezentant al vectorului $\bar{b}$. Vectorul liber $\bar{c}$ reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$ se numește suma vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ și se notează $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ sau $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ (fig. I. 8).

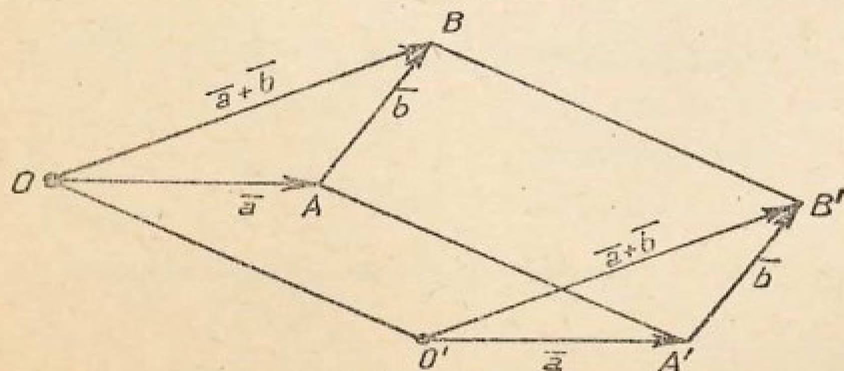


Fig. I. 7

Regula cuprinsă în definiția precedentă, pentru determinarea sumei a doi vectori liberi, se numește *regula triunghiului*.

Adunarea vectorilor

$$+ : V \times V \to V, \ (\bar{a}, \bar{b}) \to \bar{a} + \bar{b}$$

este o lege de compoziție internă bine definită deoarece

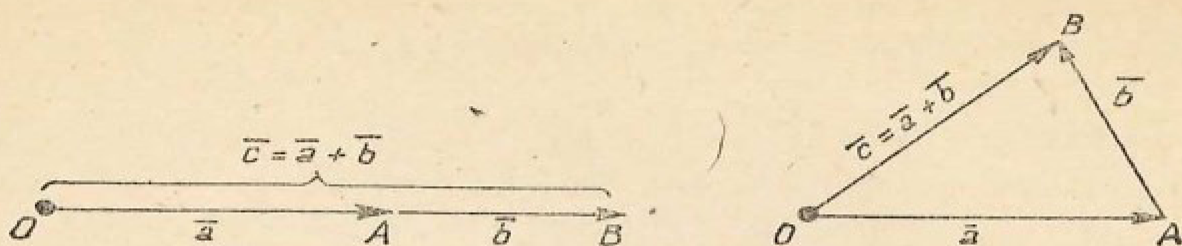


Fig. I. 8

vectorul liber $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ nu depinde de alegerea punctului O. Într-adevăr, dacă fixăm un alt punct O' şi efectuăm construcţia din figura I. 7, avem şirul de implicaţii

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BB'}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'},$$

adică $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{O'B'}$ sînt reprezentanţi ai aceluiaşi vector liber.

T e m ă. Să se analizeze cazul coliniarităţii.

T e o r e m ă. *Adunarea vectorilor liberi are următoarele proprietăţi;*

1) *asociativitate:* $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$, $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$;

2) $\bar{o}$ *este element neutru:* $\bar{a} + \bar{o} = \bar{o} + \bar{a} = \bar{a}$, $\forall \bar{a} \in V$;

3) *opusul lui* $\bar{a}$ *este simetricul lui* $\bar{a}$: $\bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{o}$, $\forall \bar{a} \in V$;

4) *comutativitate:* $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$.

Demonstraţie. Cazurile specifice coliniarităţii sînt lăsate drept teme. 1) Ţinem seama de definiţia adunării şi urmărim figura I.9: $\overrightarrow{OB}$ este reprezentantul sumei $\bar{a} + \bar{b}$, iar $\overrightarrow{OC}$ este reprezentantul sumei $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$; $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul sumei $\bar{b} + \bar{c}$, iar $\overrightarrow{OC}$ este reprezentantul sumei $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$. Rezultă $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$, ca vectori liberi definiţi de acelaşi reprezentant.

Această proprietate permite să scriem $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ în loc de $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ sau de $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

2)—3). T e m ă.

4) Fie $\bar{a}, \bar{b} \in V$. Urmărim figura I. 10: $\overrightarrow{AB}$ este reprezentantul lui $\bar{a}$, $\overrightarrow{BC}$ este reprezentantul lui $\bar{b}$, iar $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul lui $\bar{a} + \bar{b}$; de asemenea

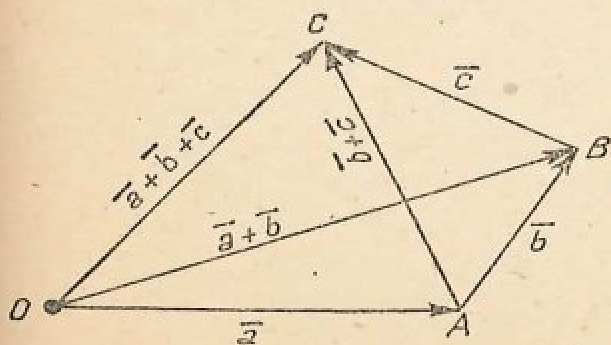


Fig. I. 9

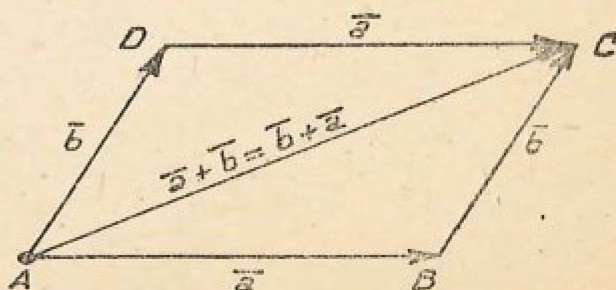


Fig. I. 10

$\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{BC}$ reprezintă pe $\bar{b}$, $\overrightarrow{DC} \sim \overrightarrow{AB}$ reprezintă pe $\bar{a}$, iar $\overrightarrow{AC}$ reprezintă pe $\bar{b} + \bar{a}$. Rezultă $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Această proprietate conduce la o nouă regulă pentru determinarea sumei a doi vectori nenuli, necoliniari, numită *regula paralelogramului;* se desenează $\overrightarrow{AB} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{AD} \in \bar{b}$ şi se determină punctul C cu proprietatea că $ABCD$ este un paralelogram; segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul lui $\bar{a} + \bar{b}$.

Proprietăţile 1), 2), 3) arată că adunarea defineşte pe V ceea ce se numeşte o *structură de grup aditiv*, iar proprietatea 4) arată că acest *grup* este *comutativ*. De aceea V se mai numeşte şi *grupul aditiv comutativ al vectorilor liberi.*

Fie vectorii liberi $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$. Prin *suma* acestor n vectori înţelegem vectorul obţinut adunînd pe $\bar{a}_1$ cu $\bar{a}_2$, apoi rezultatul cu $\bar{a}_3$ şi aşa mai departe pînă la $\bar{a}_n$. Asociativitatea adunării vectorilor are drept consecinţă faptul că suma celor n vectori este bine definită, adică ea nu se schimbă dacă înlocuim o parte din termenii consecutivi cu suma lor. Această observaţie permite notaţia simplificată $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_n$. În plus, comutativitatea permite să schimbăm ordinea termenilor.

Fie punctele $O, A_1, ..., A_n$ astfel încît $\bar{a}_1 = \overline{OA_1}$, $\bar{a}_2 = \overline{A_1A_2}$, ..., $\bar{a}_n = \overline{A_{n-1}A_n}$ (fig. I. 11). Găsim $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \overline{OA_1} + \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2}$, $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + \bar{a}_3 = \overline{OA_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{OA_3}$, ..., $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_{n-1} + \bar{a}_n = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_{n-1}) + \bar{a}_n = \overline{OA_{n-1}} + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{OA_n}$. Acest mod de adunare a celor n vectori se numeşte *regula poligonului* şi este o generalizare a regulii triunghiului.

Fie $\bar{a}$ si $\bar{b}$ doi vectori liberi. Suma dintre vectorul $\bar{a}$ şi opusul lui $\bar{b}$, adică $\bar{a} + (-\bar{b})$, se numeşte *diferenţa dintre vectorul $\bar{a}$ şi vectorul $\bar{b}$* şi se notează cu $\bar{a} - \bar{b}$. Dacă $\overrightarrow{AB}$ este reprezentantul lui $\bar{a}$, iar $\overrightarrow{AD}$ este reprezentantul lui $\bar{b}$, atunci reprezentantul lui $\bar{a} - \bar{b}$ este $\overrightarrow{DB}$ (fig. I.12). Cu alte cuvinte, dacă fixăm pe A drept origine, atunci vectorul liber definit de segmentul orientat $\overrightarrow{DB}$ este egal cu diferenţa dintre vectorul de poziţie al extremităţii B a segmentului $\overrightarrow{DB}$ şi vectorul de poziţie al originii D a segmentului $\overrightarrow{DB}$.

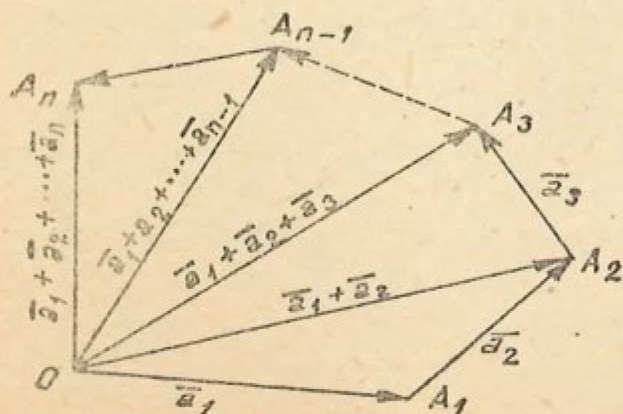


Fig. I. 11

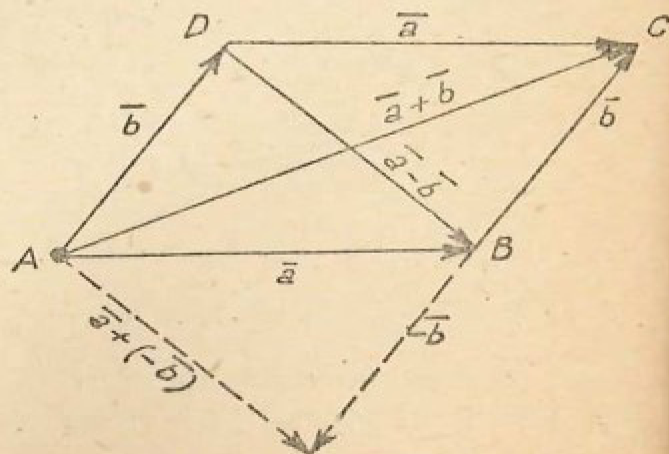


Fig. I. 12

Operaţia care asociază fiecărei perechi $(\bar{a}, \bar{b})$ diferenţa $\bar{a} - \bar{b}$ se numeşte *scăderea* vectorilor. Proprietăţile scăderii vectorilor sînt consecinţe ale proprietăţilor adunării vectorilor.

Comparînd relaţiile $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$, $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ ajungem la concluzia că într-o egalitate vectorială, „putem trece un termen dintr-o parte în alta" cu condiţia să-l înlocuim cu opusul său.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie segmentul $[AB]$ şi M_0 mijlocul său. Să se verifice că pentru orice punct M din plan avem $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MM_0} + \overline{MM_0}$.

Soluţie (fig. I. 13). Regula triunghiului dă $\overline{MA} = \overline{MM_0} + \overline{M_0A}$, $\overline{MB} = \overline{MM_0} + \overline{M_0B}$, iar definiţia opusului conduce la $\overline{M_0A} = -\overline{M_0B}$. Acestea implică $\overline{MA} + \overline{MB} = (\overline{MM_0} + \overline{M_0A}) + (\overline{MM_0} + \overline{M_0B}) =$ (asociativitate şi comutativitate), $(\overline{MM_0} + \overline{MM_0}) + (\overline{M_0A} + \overline{M_0B}) = (\overline{MM_0} + \overline{MM_0}) + \overline{0} =$ ($\overline{0}$ este element neutru), $\overline{MM_0} + \overline{MM_0}$.

2. Fie un dreptunghi $ABCD$. Dacă M este un punct din plan astfel încît $\overline{MC} + \overline{MB} + \overline{BM} = 0$, atunci să se exprime suma $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MD}$ în funcţie de $\overline{BA}$.

Soluţie (fig. I. 14). Succesiv găsim $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MD} =$ (regula triunghiului), $(\overline{MB} + \overline{BA}) + \overline{MB} + (\overline{MC} + \overline{CD}) =$ (asociativitate şi comutativitate), $(\overline{MC} + \overline{MB} + \overline{MB}) + (\overline{BA} + \overline{CD}) = \overline{0} + (\overline{BA} + \overline{CD}) =$ ($\overline{0}$ este element neutru), $\overline{BA} + \overline{CD} = \overline{BA} + \overline{BA}$.

3. Să se demonstreze egalităţile

$$(\bar{a} + \bar{c}) - (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} - \bar{b}, \quad (\bar{a} - \bar{c}) - (\bar{b} - \bar{c}) = \bar{a} - \bar{b}.$$

Soluţie. Deoarece justificările sînt de aceeaşi natură pentru ambele egalităţi, o vom demonstra numai pe prima. Deoarece $(\bar{b} + \bar{c}) + [(-\bar{b}) + (-\bar{c})] = [\bar{b} + (-\bar{b})] + [\bar{c} + (-\bar{c})] = \overline{0} + \overline{0} = 0$ rezultă că opusul lui $\bar{b} + \bar{c}$, adică $-(\bar{b} + \bar{c})$ este egal cu $(-\bar{b}) + (-\bar{c})$. De aceea $(\bar{a} + \bar{c}) - (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{c}) + [-(\bar{b} + \bar{c})] = (\bar{a} + \bar{c}) + [(-\bar{b}) + (-\bar{c})] = [\bar{a} + (-\bar{b})] + [\bar{c} + (-\bar{c})] = (\bar{a} - \bar{b}) + \overline{0} = \bar{a} - \bar{b}$.

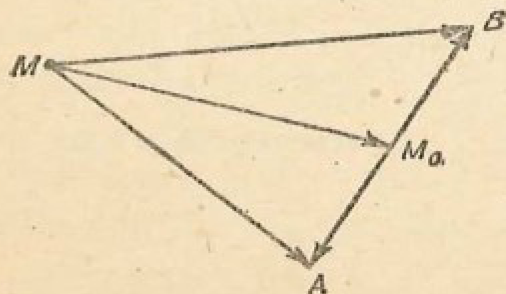


Fig. I. 13

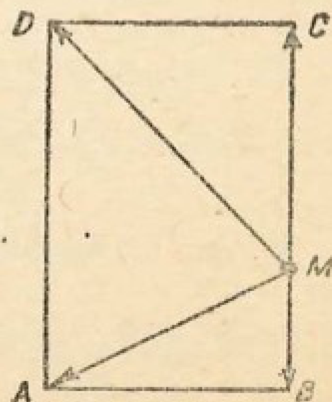


Fig. I. 14

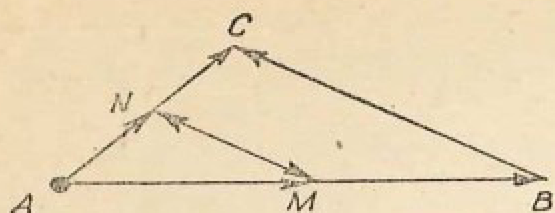


Fig. I. 15

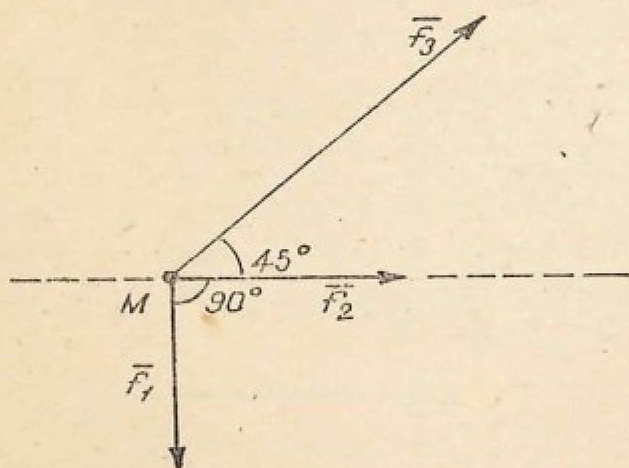
4. Fie triunghiul ABC şi M, N respectiv mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[AC]$. Să se arate că $\overline{BC} = \overline{MN} + \overline{MN}$.

Soluţie (fig. I. 15). Mai întîi $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Pe de altă parte, $\overline{AC} = \overline{AN} + \overline{NC} = \overline{AN} + \overline{AN}$, $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + \overline{AM}$. Rezultă $\overline{BC} = (\overline{AN} + \overline{AN}) - (\overline{AM} + \overline{AM}) = (\overline{AN} + \overline{AN}) + [(-\overline{AM}) + (-\overline{AM})] = [\overline{AN} + (-\overline{AM})] + [\overline{AN} + (-\overline{AM})] = (\overline{AN} - \overline{AM}) + (\overline{AN} - \overline{AM}) = \overline{MN} + \overline{MN}$.

5. Asupra punctului material M din plan acţionează forţele $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ ca în figura I.16. Ştiind că direcţiile forţelor $\bar{f}_1$ şi $\bar{f}_2$ sînt ortogonale, că unghiul dintre direcţiile forţelor $\bar{f}_2$ şi $\bar{f}_3$ este de 45° şi că $\| \bar{f}_1 \| = \| \bar{f}_2 \| = \sqrt{2}$ daN, $\| \bar{f}_3 \| = 3$ daN, să se determine direcţia, sensul şi mărimea forţei rezultante ce acţionează asupra punctului M.

Soluţie. Regula paralelogramului arată că $\bar{r}_1$ este rezultanta (suma) forţelor $\bar{f}_1$ şi $\bar{f}_2$. Direcţia şi sensul lui $\bar{r}_1$ sînt indicate pe figură, iar lungimea lui $\bar{r}_1$ este $\| \bar{r}_1 \| = \sqrt{\| \bar{f}_1 \|^2 + \| \bar{f}_2 \|^2} = 2$ daN. Adunînd pe $\bar{r}_1$ cu $\bar{f}_3$ (regula paralelogramului) găsim rezultanta căutată $\bar{r} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3$.

Fie α unghiul ascuţit dintre direcţia lui $\bar{r}_1$ şi direcţia lui $\bar{r}$, iar β unghiul ascuţit dintre direcţia lui $\bar{f}_2$ şi direcţia lui $\bar{r}$. Evident $\alpha = \beta + 45°$, iar β este mai mic decît 45°. Din figura I. 16 se observă că $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\| \bar{f}_3 \|}{\| \bar{r}_1 \|}$, adică $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$. Rezultă $\beta = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - 45°$ şi astfel direcţia rezultantei $\bar{r}$ este precizată în raport cu direcţia lui $\bar{f}_2$. Sensul lui $\bar{r}$ este marcat pe figură, iar $\| \bar{r} \| = \sqrt{\| \bar{r}_1 \|^2 + \| \bar{f}_3 \|^2} = \sqrt{13}$ daN.



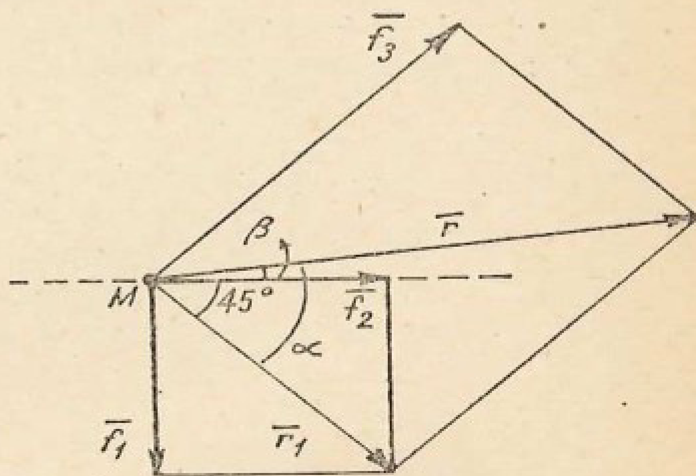


Fig. I. 16

§ 3. Înmulţirea vectorilor cu numere reale

Fie $\mathbf{R}$ mulţimea numerelor reale, iar V mulţimea vectorilor liberi din plan.

D e f i n i ţ i e. Fie $t \in \mathbf{R}$ şi $\bar{a} \in V$. Prin produsul dintre vectorul $\bar{a}$ şi numărul real t vom înţelege vectorul $t\bar{a}$ definit astfel:

1) dacă $\bar{a} \neq \overline{0}$ şi $t \neq 0$, atunci $t\bar{a}$ este vectorul care are aceeaşi direcţie cu $\bar{a}$, acelaşi sens cu $\bar{a}$ dacă $t > 0$ şi sens contrar dacă $t < 0$, lungimea $|t| \|\bar{a}\|$ (fig. I. 17);

2) dacă $\bar{a} = \overline{0}$ sau $t = 0$, atunci $t\bar{a} = \overline{0}$.

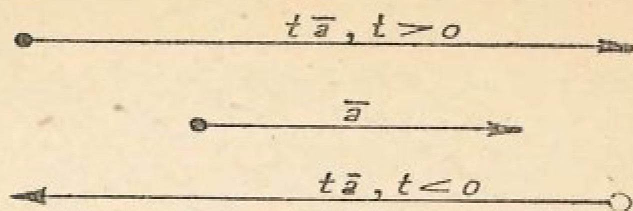


Fig. I. 17

Din definiţie decurge că $t\bar{a}$ este un vector coliniar cu $\bar{a}$.

Exemple. 1) Vectorul $(-1)\bar{a}$ are aceeaşi direcţie cu $\bar{a}$, sensul contrar sensului lui $\bar{a}$ şi lungimea egală cu lungimea lui $\bar{a}$. De aceea $(-1)\ \bar{a}$ este opusul lui $\bar{a}$, adică $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$.

2) Vectorul $3\bar{a}$ are direcţia lui $\bar{a}$, sensul lui $\bar{a}$ şi lungimea egală cu triplul lungimii lui $\bar{a}$.

3) Vectorul $-\frac{1}{2}\ \bar{a}$ are direcţia lui $\bar{a}$, sensul contrar lui $\bar{a}$ şi lungimea egală cu jumătate din lungimea lui $\bar{a}$.

4) Oricărui vector $\bar{a}$ de lungime $\|\bar{a}\| > 0$ i se asociază un vector $\bar{a}_0 = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a}$, avînd aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\bar{a}$, numit *versorul* lui $\bar{a}$. Într-adevăr, $\|\bar{a}_0\| = \left\|\frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a}\right\| = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\|\bar{a}\| = 1$. Relaţia de definiţie pentru $\bar{a}_0$ este echivalentă cu $\bar{a} = \|\bar{a}\|\ \bar{a}_0$.

Aplicaţia definită pe $\mathbf{R} \times V$ cu valori în V care asociază fiecărei perechi ordonate $(t, \bar{a})$ vectorul $t\bar{a}$ este o lege de compoziţie externă între elementele lui V şi ale lui $\mathbf{R}$ numită *înmulţirea vectorilor liberi cu numere reale*. În contextul acestei operaţii numerele reale se mai numesc şi *scalari*, iar operaţia în sine *înmulţirea vectorilor liberi cu scalari*.

Teoremă. *Înmulţirea vectorilor liberi cu numere reale are următoarele proprietăţi:*

1) $1\bar{a} = \bar{a}, \quad \forall \bar{a} \in V$;

2) $s(t\bar{a}) = (st)\bar{a}, \quad \forall s,\ t \in \mathbf{R}, \quad \forall \bar{a} \in V$;

3) *distributivitate faţă de adunarea numerelor reale:*

$$(s + t)\bar{a} = s\bar{a} + t\bar{a}, \quad \forall s,\ t \in \mathbf{R}, \quad \forall \bar{a} \in V;$$

4) *distributivitate faţă de adunarea vectorilor:*

$$t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}. \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall \bar{a},\ \bar{b} \in V.$$

Demonstraţie. Relaţia 1) este imediată. Dacă numerele reale sau vectorii sînt zero, atunci şi relaţiile 2), 3), 4) sînt imediate.

2)—3). Temă.

4) Cazul coliniarităţii îl lăsăm drept temă.

Fie $\overrightarrow{OA}$ reprezentantul vectorului $\bar{a}$ şi $\overrightarrow{AB}$ reprezentantul vectorului $\bar{b}$. Atunci $\overrightarrow{OB}$ este reprezentantul vectorului $\bar{a} + \bar{b}$ (fig. I. 18).

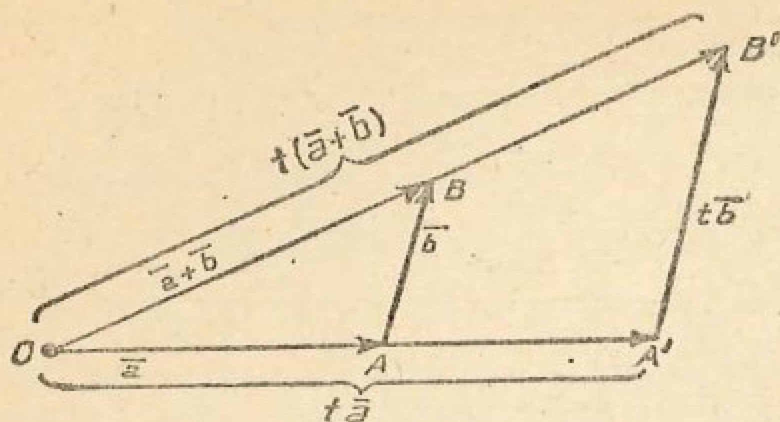


Fig. I. 18

Presupunem $t > 0$ şi notăm cu $\overrightarrow{OA'}$ reprezentantul vectorului $t\bar{a}$ şi cu $\overrightarrow{OB'}$ reprezentantul vectorului $t(\bar{a}+\bar{b})$. Se observă că $OAB \sim OA'B'$ (fig. I.18) avînd un unghi comun şi laturile, care determină acest unghi, de lungimi proporţionale. Rezultă $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{AB}$, adică $\overrightarrow{A'B'}$ este reprezentantul vectorului $t\bar{b}$. Deci $\overrightarrow{OB'}$ este reprezentantul sumei $t\bar{a} + t\bar{b}$, adică $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$.
Cazul $t < 0$ se tratează analog.

Să prezentăm cîteva consecinţe directe ale definiţiei şi ale teoremei precedente, consecinţe ce constituie puncte de sprijin ale tehnicii de calcul elementar (demonstraţiile sînt lăsate drept teme):

$$-(t\bar{a}) = (-t)\bar{a} = t(-\bar{a}),$$
$$(s - t)\bar{a} = s\bar{a} + (-t)\bar{a} = s\bar{a} + (-t\bar{a}) = s\bar{a} - t\bar{a},$$
$$s(\bar{a} - \bar{b}) = s[\bar{a} + (-\bar{b})] = s\bar{a} + (-s)\bar{b} = s\bar{a} + (-s\bar{b}) = s\bar{a} - s\bar{b},$$

$\forall s,\ t \in \mathbb{R},\ \forall \bar{a},\ \bar{b} \in V$. Ca urmare, adunarea şi scăderea vectorilor liberi, precum şi înmulţirea vectorilor liberi cu numere reale au proprietăţi analoage adunării, scăderii şi înmulţirii numerelor reale.

Proprietăţile adunării vectorilor liberi, date în teorema din § 2, şi proprietăţile înmulţirii vectorilor liberi cu numere reale, date în teorema din acest paragraf, arată că V este ceea ce se numeşte un *spaţiu vectorial peste mulţimea numerelor reale*. Din acest motiv, în cele ce urmează, mulţimea V va fi numită *spaţiul vectorial al vectorilor liberi din plan*.

PROBLEME REZOLVATE

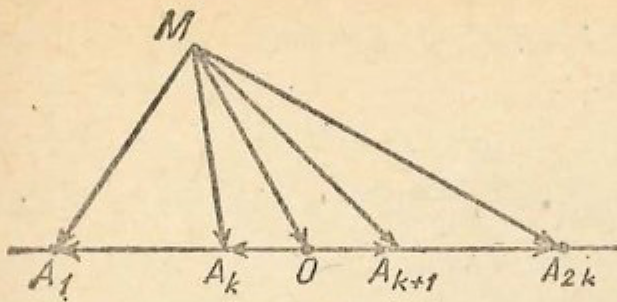
1. Fie $\bar{a} \in V$ şi $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $\underbrace{\bar{a} + \ldots + \bar{a}}_{n \text{ termeni}} = n\bar{a}$.

Soluţie. Urmărind figura I. 19 se observă că $\underbrace{\bar{a} + \ldots + \bar{a}}_{n \text{ termeni}} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{OA_n}$, iar $\overrightarrow{OA_n}$ are direcţia lui $\bar{a}$, sensul lui $\bar{a}$ şi lungimea $n\,\|\bar{a}\|$.



Fig. I. 19

Notă. Relaţia din această problemă poate fi privită ca o consecinţă a teoremei din acest paragraf.



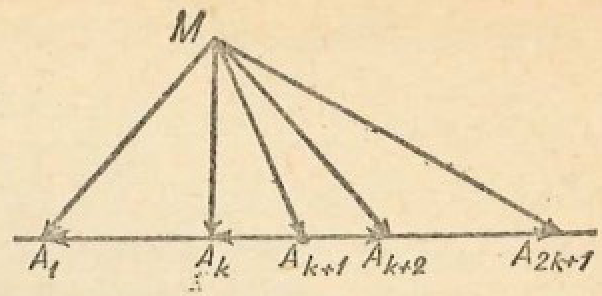


Fig. I. 20

2. Fie d o dreaptă pe care se fixează $n \geq 2$ puncte echidistante. Se notează cu O mijlocul segmentului $[A_1A_n]$ și cu M un punct arbitrar din plan, exterior dreptei d. Să se arate că

$$\overline{MA_1} + \overline{MA_2} + \ldots + \overline{MA_n} = n\overline{MO}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

Soluție. Dacă $n = 2k$, atunci punctul O se află între A_k și A_{k+1}, iar dacă $n = 2k + 1$, atunci punctul O coincide cu A_{k+1} (fig. I. 20). Regula triunghiului dă $\overline{MA_i} = \overline{MO} + \overline{OA_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pe de altă parte $(\overline{OA_k} + \overline{OA_{k+1}}) + \ldots + (\overline{OA_1} + \overline{OA_n}) = \overline{0}$ sau $\overline{OA_{k+1}} + (\overline{OA_{k-1}} + \overline{OA_{k+2}}) + \ldots + (\overline{OA_1} + \overline{OA_{2k+1}}) = \overline{0}$. De aceea $\sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} = 0$. Astfel găsim

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{MO} + \overline{OA_i}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{MO} + \sum_{i=1}^{n} \overline{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{MO} = n\overline{MO}.$$

3. Se dă hexagonul regulat $ABCDEF$. Să se exprime vectorii liberi $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ în funcție de vectorii liberi $\overline{AB} = \bar{b}$ și $\overline{AC} = \bar{c}$.

Soluție (fig. I. 21). Relațiile $AD \parallel BC$, $\overrightarrow{AD}$ are același sens cu $\overrightarrow{BC}$, $d(A, D) = 2d(B, C)$ implică $\overline{AD} = 2\overline{BC}$. Aceasta împreună cu $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \bar{c} - \bar{b}$ conduc la $\overline{AD} = 2(\bar{c} - \bar{b})$. Analog, din $\overline{AE} = \overline{BD}$, $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = 2(\bar{c} - \bar{b}) - \bar{b} = 2\bar{c} - 3\bar{b}$ găsim $\overline{AE} = 2\bar{c} - 3\bar{b}$. În final, $\overline{AF} = \overline{CD}$, $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC} = 2(\bar{c} - \bar{b}) - \bar{c} = \bar{c} - 2\bar{b}$, deci $\overline{AF} = \bar{c} - 2\bar{b}$.

4. Se dau vectorii liberi $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j}$. Să se calculeze $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$, $(x + y)(\bar{a} - \bar{b}) - (x - y)(\bar{a} + \bar{b})$.

Soluție. Ținînd seama de proprietățile adunării vectorilor și proprietățile înmulțirii dintre vectori și numere reale, obținem

$$\bar{a} + \bar{b} = (\bar{i} + \bar{j}) + (2\bar{i} - \bar{j}) = (\bar{i} + 2\bar{i}) + (\bar{j} - \bar{j}) = 3\bar{i},$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (\bar{i} + \bar{j}) - (2\bar{i} - \bar{j}) = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{i} + \bar{j} = -\bar{i} + 2\bar{j},$$

$$(x + y)(\bar{a} - \bar{b}) - (x - y)(\bar{a} + \bar{b}) = (x + y)(-\bar{i} + 2\bar{j}) - (x - y)(3\bar{i}) = -x\bar{i} + 2x\bar{j} - y\bar{i} + 2y\bar{j} - 3x\bar{i} + 3y\bar{i} = (2y - 4x)\bar{i} + (2x + 2y)\bar{j}.$$

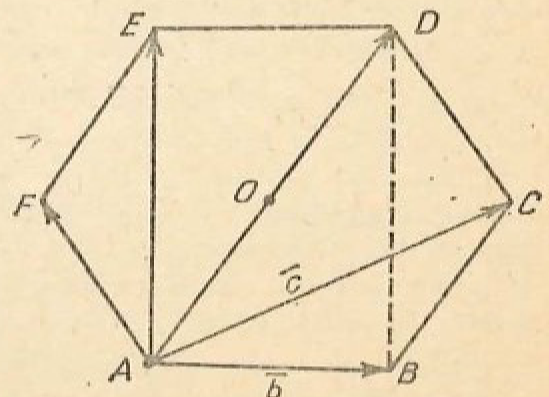


Fig. I. 21

5. Să se discute şi să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \lambda\bar{x} + \bar{y} = \bar{a} \\ \bar{x} + \lambda\bar{y} = \bar{b}, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Soluţie. În a doua ecuaţie înmulţim ambele părţi cu λ, apoi scădem parte cu parte din prima ecuaţie. Rezultă $(1 - \lambda^2)\bar{y} = \bar{a} - \lambda\bar{b}$.

Dacă $\lambda \neq \pm 1$, atunci ecuaţia în $\bar{y}$ are soluţie unică $\bar{y} = \frac{1}{1 - \lambda^2}(\bar{a} - \lambda\bar{b})$ şi deci sistemul are soluţia unică $(\bar{x}, \bar{y})$ unde

$$\bar{x} = \frac{1}{1 - \lambda^2}(\bar{b} - \lambda\bar{a}), \quad \bar{y} = \frac{1}{1 - \lambda^2}(\bar{a} - \lambda\bar{b}).$$

Dacă $\lambda = \pm 1$ şi $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, atunci ecuaţia în $\bar{y}$ este o identitate şi sistemul admite soluţiile $(\bar{x}, \bar{y})$, unde $\bar{x} = \bar{b} - \lambda\bar{y}$, $\bar{y} \in V$.

Dacă $\lambda = \pm 1$ şi $\bar{a} \neq \lambda\bar{b}$, atunci ecuaţia în $\bar{y}$ este o imposibilitate şi sistemul nu are soluţii.

§ 4. Dependenţă liniară

Fie V spaţiul vectorial al vectorilor liberi din plan. Adunarea vectorilor şi înmulţirea vectorilor cu numere reale generează exprimări de tipul $\bar{b} = 2\bar{c} + 2\bar{d}$, $\bar{e} = \frac{1}{2}\bar{i} + \pi\bar{j}$, etc.

Fie $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in V$, $n \in \mathbf{N}^*$. Orice vector de forma

$$\bar{a} = t_1\bar{a}_1 + \ldots + t_n\bar{a}_n, \quad t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$$

se numeşte *combinaţie liniară* a celor n vectori $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$.

Definiţie. Vectorii $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ se numesc liniar dependenţi dacă există n numere reale $t_1, \ldots t_n$ nu toate nule astfel încît

$$t_1\bar{a}_1 + \ldots + t_n\bar{a}_n = \bar{0}.$$

Vectorii $a_1, \ldots, a_n$ se numesc liniar independenţi dacă nu sînt liniar dependenţi, adică dacă orice relaţie

$$t_1\bar{a}_1 + \ldots + t_n\bar{a}_n = \bar{0} \text{ implică } t_1 = \ldots = t_n = 0.$$

Observaţii. 1) Vectorul liber zero este liniar dependent: $1\bar{0} = \bar{0}$.

2) Orice vector liber nenul este liniar independent: $t\bar{a} = \bar{0}$, $\bar{a} \neq \bar{0} \Rightarrow t = 0$.

3) Dacă $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\bar{b} = \bar{0}$, atunci vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ sînt liniar dependenţi.

4) Dacă $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ sînt liniar dependenţi, atunci şi $\bar{a}_1 \ldots, \bar{a}_n, a_{n+1} \ldots, \bar{a}_{n+p}$ sînt tot liniar dependenţi. O parte dintre vectorii liniar independenţi $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ sînt tot vectori liniar independenţi.

Vectorii $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n$ sînt liniar dependenţi dacă şi numai dacă cel puţin unul dintre ei se poate exprima ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori. Într-adevăr, pentru $t_i \neq 0$, relaţia $t_1\bar{a}_1 + \ldots + t_{i-1}\bar{a}_{i-1} + t_i\bar{a}_i + t_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \ldots + t_n\bar{a}_n = \bar{0}$ este echivalentă cu

$$\bar{a}_i = -\frac{t_1}{t_i}\bar{a}_1 - \ldots - \frac{t_{i-1}}{t_i}\bar{a}_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i}\bar{a}_{i+1} - \ldots - \frac{t_n}{t_i}\bar{a}_n.$$

Teoremă. *Vectorii liberi $\bar{a}, \bar{b} \in V$ sînt liniar dependenți dacă și numai dacă sînt coliniari.*

Demonstrație. Presupunem că vectorii $\bar{a}, \bar{b} \in V$ sînt liniar dependenți, adică $r\bar{a} + s\bar{b} = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Fie $s \neq 0$. Găsim $\bar{b} = -\frac{r}{s}\bar{a}$ și deci $\bar{b}$ și $\bar{a}$ sînt coliniari (dacă $s = 0$ sau dacă unul dintre vectori este $\bar{0}$, atunci funcționează convenția că vectorul zero are aceeași direcție cu orice vector).

Reciproc, presupunem că $\bar{a}, \bar{b} \in V$ sînt coliniari. Dacă $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\bar{b} = \bar{0}$, atunci vectorii $\bar{a}, \bar{b}$ sînt evident liniar dependenți. În caz contrar, adică $\bar{a}, \bar{b} \in V - \{\bar{0}\}$, notăm cu $\bar{a}_0$ versorul lui $\bar{a}$ și cu $\bar{b}_0$ versorul lui $\bar{b}$. Avem $\bar{a} = \|\bar{a}\|\,\bar{a}_0$, $\bar{b} = \|\bar{b}\|\,\bar{b}_0$ și $\bar{b}_0 = \pm\,\bar{a}_0$. Pentru $\bar{b}_0 = \bar{a}_0$ găsim $\bar{b} = \|\bar{b}\|\,\bar{b}_0 = \|\bar{b}\|\,\bar{a}_0 = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}\bar{a}$ și deci $\bar{b} = t\bar{a}$, unde $t = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}$. Deci $t\bar{a} - 1\bar{b} = \bar{0}$, adică $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt liniar dependenți. Analog se justifică cazul $\bar{b}_0 = -\,\bar{a}_0$.

Deoarece dependența liniară în V este echivalentă cu coliniaritatea rezultă că orice doi vectori liberi necoliniari sînt liniar independenți.

Teoremă. *Oricare trei vectori liberi din V sînt liniar dependenți.*

Demonstrație. Fie $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$. Dacă doi dintre ei sînt coliniari, atunci aceștia sînt liniar dependenți și deci $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sînt liniar dependenți. Presupunem acum că $\bar{a}$ și $\bar{b}$ nu sînt coliniari, adică sînt liniar independenți. Fie $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$ reprezentanții lui $\bar{a}$, $\bar{b}$, și $\bar{c}$ (fig. I.22). Se observă că $\overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON}$. Pe de altă parte, $\overline{OM}$ și $\overline{OA}$ sînt coliniari, adică $\overline{OM} = r\overline{OA}$; analog $\overline{ON} = s\overline{OB}$. Deci $\overline{OC} = r\overline{OA} + s\overline{OB}$ sau altfel scris $\bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b}$, adică $r\bar{a} + s\bar{b} - 1\,\bar{c} = \bar{0}$.

Această teoremă arată că numărul maxim de vectori liniar independenți din V este 2.

Definiție. Numărul maxim de vectori liniar independenți din V, adică 2, se numește dimensiunea lui V. O pereche ordonată $(\bar{a}, \bar{b})$ de vectori liberi necoliniari (liniar independenți) se numește bază a lui V.

Fie $(\bar{a}, \bar{b})$ o bază în V, fie $\bar{c}$ un vector oarecare din V și $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ reprezentanții vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. După cum am arătat în demonstrația teoremei precedente (fig. I. 22), relația $\overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON} = r\overline{OA} + s\overline{OB}$ este totuna cu

$$\bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b},$$

adică orice vector liber $\bar{c}$ poate fi exprimat ca o combinație liniară de $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Se observă că

$$r = \pm\frac{d(O,M)}{d(O\,A)}, \quad s = \pm\frac{d(O,N)}{d(O,B)},$$

pentru fiecare luîndu-se + sau − după cum vectorii respectivi $\overline{OM}$ și $\overline{OA}$, $\overline{ON}$ și $\overline{OB}$ sînt

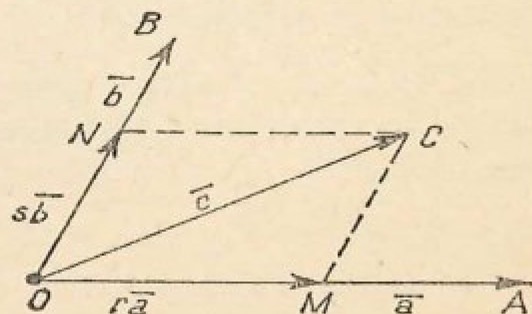


Fig I.22

de același sens sau de sens opus. Deseori se spune că vectorul $\bar{c}$ a fost *descompus după vectorii bazei*. Descompunerea lui $\bar{c}$ după vectorii bazei este unică. Într-adevăr, sînt adevărate implicațiile:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{a}, \bar{b} = \text{lin. indep.}\\ \bar{c} = r_1\bar{a} + s_1\bar{b}\\ \bar{c} = r_2\bar{a} + s_2\bar{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\bar{a}, \bar{b} = \text{lin. indep.}\\ (r_1 - r_2)\bar{a} + (s_1 - s_2)\bar{b} = \bar{0}\end{array}\right\} \Rightarrow r_1 - r_2 = 0,\ s_1 - s_2 = 0,$$

adică $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$.

Numerele reale r și s definite prin $\bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b}$ se numesc *coordonatele* vectorului liber $\bar{c}$ în raport cu baza $(\bar{a}, \bar{b})$. Dacă la fiecare vector $\bar{c}$ îi asociem perechea ordonată (r, s) a coordonatelor lui față de baza $(\bar{a}, \bar{b})$ obținem o corespondență biunivocă între V și $\mathbb{R}^2$. Această corespondență se numește sistem de coordonate pe V determinat de baza $(\bar{a}, \bar{b})$ și se notează prin scrierea alăturată a vectorului și a perechii coordonatelor sale, adică $\bar{c}(r, s)$.

Cazuri particulare: $\bar{0}(0, 0)$, $\bar{a}(1, 0)$, $\bar{b}(0, 1)$.

T e o r e m ă. *Fie $\bar{c}_1(r_1, s_1)$ și $\bar{c}_2(r_2, s_2)$ doi vectori liberi dați prin coordonatele lor în raport cu o bază $(\bar{a}, \bar{b})$ fixată în V.*

1) Vectorii $\bar{c}_1$ și $\bar{c}_2$ sînt egali dacă și numai dacă au coordonatele corespondente egale, adică

$$\bar{c}_1 = \bar{c}_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ s_1 = s_2.$$

2) A aduna pe $\bar{c}_1$ cu $\bar{c}_2$ înseamnă a aduna coordonatele corespondente, adică

$$\bar{c}_1 + \bar{c}_2 \text{ are coordonatele } (r_1 + r_2,\ s_1 + s_2).$$

3) A înmulți pe $\bar{c}_1$ cu numărul real t înseamnă a înmulți coordonatele lui $\bar{c}$ cu t, adică

$$t\bar{c}_1 \text{ are coordonatele } (tr_1,\ ts_1).$$

4) $\bar{c}_1$ este coliniar cu $\bar{c}_2$ dacă și numai dacă coordonatele lor sînt proporționale.

Demonstrație. 2) Ținînd seama de proprietățile operațiilor cu vectori liberi găsim

$\bar{c}_1 + \bar{c}_2 = (r_1\bar{a} + s_1\bar{b}) + (r_2\bar{a} + s_2\bar{b}) =$ (asociativitatea și comutativitatea sumei, $(r_1\bar{a} + r_2\bar{a}) + (s_1\bar{b} + s_2\bar{b}) =$ (distributivitatea înmulțirii față de adunarea numerelor reale), $(r_1 + r_2)\bar{a} + (s_1 + s_2)\bar{b}$.

1), 3), 4) Temă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie a, b, c lungimile laturilor și α, β, γ măsurile unghiurilor unui triunghi. Să se arate că oricare ar fi vectorii $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, următorii vectori sînt liniari dependenți:

1) $a\bar{x} + b\bar{y}$, $\quad (\sin\alpha)\bar{x} + (\sin\beta)\bar{y}$;

2) $b\bar{y} + c\bar{z}$, $\quad (\sin\beta)\bar{y} + (\sin\gamma)\bar{z}$;

3) $c\bar{z} + a\bar{x}$, $\quad (\sin\gamma)\bar{z} + (\sin\alpha)\bar{x}$.

Soluţie. Ne oprim la cazul 1), celelalte tratîndu-se analog. Teorema sinusurilor implică $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$. Rezultă $a\bar{x} + b\bar{y} = (2R \sin \alpha)\bar{x} + (2R \sin \beta)\bar{y} = 2R[(\sin \alpha)\bar{x} + (\sin \beta)\bar{y}]$ şi deci $1 \cdot (a\bar{x} + b\bar{y}) - 2R[(\sin \alpha)\bar{x} + (\sin \beta)\bar{y}] = 0$. Deoarece există perechea de numere reale nenule $(1, 2R)$ care au o combinaţie liniară egală cu vectorul zero, vectorii $a\bar{x} + b\bar{y}$, $(\sin \alpha)\bar{x} + (\sin \beta)\bar{y}$ sînt liniar dependenţi.

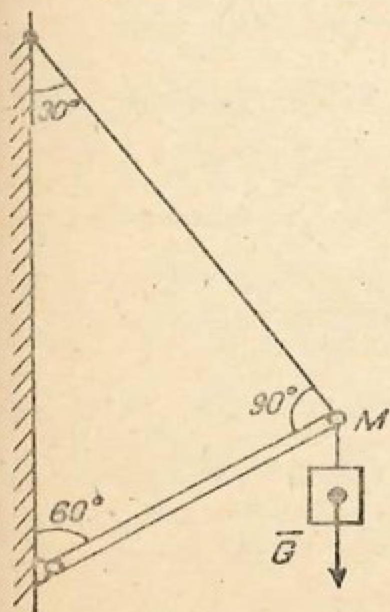
2. Fie $\bar{a}$, $\bar{b}$ doi vectori liniar independenţi. Ce relaţie trebuie să satisfacă numerele x, y, z, u pentru ca vectorii $x\bar{a} + y\bar{b}$, $z\bar{a} + u\bar{b}$ să fie liniar independenţi?

Soluţie. Egalitatea $r(x\bar{a} + y\bar{b}) + s(z\bar{a} + u\bar{b}) = \bar{0}$ este echivalentă cu $(rx + sz)\bar{a} + (ry + su)\bar{b} = \bar{0}$. Aceasta din urmă împreună cu ipoteza că $\bar{a}, \bar{b}$ sînt liniar independnţi implică $rx + sz = 0$, $ry + su = 0$. Astfel perechile (r, s) trebuie să fie soluţiile unui sistem liniar şi omogen. Sistemul admite numai soluţia $r = 0$, $s = 0$ dacă şi numai dacă $xu - yz \neq 0$.

3. Un corp cu greutatea de 200 N este suspendat cu ajutorul unei bare solide articulată la un capăt, de masă neglijabilă, şi cu ajutorul unui fir, ca în figura I.23. Să se determine mărimea tensiunii în fir şi mărimea forţei de compresiune a barei.

Soluţie. Izolăm punctul M de sistem şi figurăm forţele care acţionează asupra lui (fig. I.23); $\bar{G}$ este greutatea corpului, $\bar{T}$ este tensiunea în fir, iar $\bar{F}$ este forţa de compresiune a barei. Sistemul se află în echilibru dacă şi numai dacă $\bar{T} + \bar{F} = -\bar{G}$. Cu alte cuvinte vectorul $-\bar{G}$ a fost descompus după vectorii $\bar{T}$ şi $\bar{F}$. Rezultă $\| \bar{T} \| = \| \bar{G} \| \cos 30° = 200 \frac{\sqrt{3}}{2}$ N, $\| \bar{F} \| = \| \bar{G} \| \cos 60° = 100$ N.

4. Fie triunghiul ABC astfel încît $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ să fie reprezentanţii vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, respectiv $\bar{c}$. În V fixăm baza $(\bar{a}, \bar{b})$. Să se găsească coordonatele vectorilor $\bar{c}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, unde A_1, B_1, C_1 sînt respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Să se arate că $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ pot fi laturile unui triunghi.



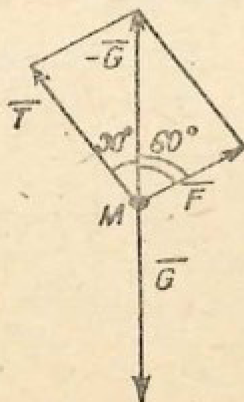


Fig. I. 23

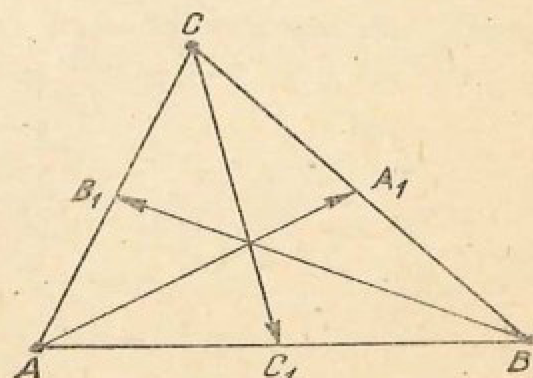


Fig. I. 24

Soluție (fig. I. 24). Se observă că $\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA}$, adică $\bar{a} + \bar{b} = -\bar{c}$ sau $\bar{c} = -\bar{a} - \bar{b}$. Deci $(-1, -1)$ sînt coordonatele vectorului $\bar{c}$ în raport cu baza $(\bar{a}, \bar{b})$.

Analog,

$\overline{AA_1} = \overline{CA_1} - \overline{CA} = -\frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$, $\overline{BB_1} = \overline{AB_1} - \overline{AB} = -\frac{1}{2}\bar{b} - \bar{c} = -\frac{1}{2}\bar{b} - (-\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{CC_1} = \overline{BC_1} - \overline{BC} = \frac{1}{2}\bar{c} - \bar{a} = -\frac{1}{2}(-\bar{a} - \bar{b}) - \bar{a} = -\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$.

Astfel $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sînt respectiv coordonatele vectorilor $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ și $\overline{CC_1}$ față de baza $(\bar{a}, \bar{b})$.

În general, segmentele neorientate corespunzătoare reprezentanților vectorilor liberi $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ pot fi laturile unui triunghi dacă și numai dacă $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = \bar{0}$. În cazul nostru, $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}$, adică $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ pot fi laturile unui triunghi.

5. Fie un triunghi ABC, iar $(\overline{AB}, \overline{AC})$ baza lui V.

1) Fie P simetricul lui B în raport cu C. Să se găsească coordonatele vectorului $\overline{AP}$.

2) Se iau punctele Q și R astfel încît $\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{AR} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Să se determine coordonatele vectorilor $\overline{RQ}$, $\overline{RP}$ și să se arate că punctele P, Q, R sînt coliniare.

Soluție (fig. I.25). 1) Urmărind figura și ținînd seama de ipoteză găsim $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AB} + 2\overline{BC} = \overline{AB} + 2(\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{AB} - 2\overline{AB} + 2\overline{AC} = -\overline{AB} + 2\overline{AC}$, adică $(-1, 2)$ sînt coordonatele lui $\overline{AP}$ în raport cu baza $(\overline{AB}, \overline{AC})$.

2) Analog,

$$\overline{RQ} = \overline{RA} + \overline{AQ} = -\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC},$$

$$\overline{RP} = \overline{RA} + \overline{AP} = \overline{RA} + (\overline{AB} + \overline{BP}) = -\frac{1}{3}\overline{AB} + \overline{AB} + 2\overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{AB} + 2(\overline{BA} + \overline{AC}) = \frac{2}{3}\overline{AB} - 2\overline{AB} + 2\overline{AC} = -\frac{4}{3}\overline{AB} + 2\overline{AC},$$

adică $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ sînt respectiv coordonatele vectorilor $\overline{RQ}$, $\overline{RP}$ în raport cu baza $(\overline{AB}, \overline{AC})$.

Punctele P, Q, R sînt coliniare deoarece se verifică relația $\overline{RP} = 4\overline{RQ}$ adică reprezentanții $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{RQ}$ sînt coliniari.

6. Se dau $\bar{a}(1, 2)$ și $\bar{b}(x - 2y, x + y)$. Să se determine x și y astfel încît $\bar{a} = \bar{b}$.

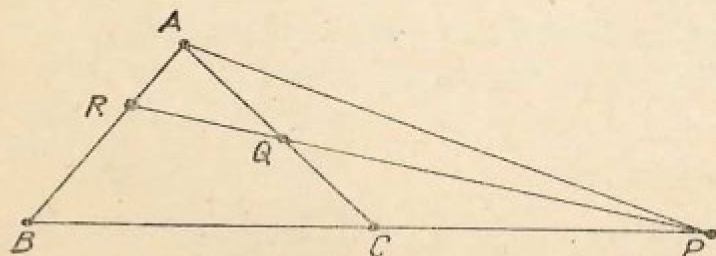


Fig. I. 25

Soluție. Reamintim că doi vectori raportați la aceeași bază sînt egali dacă și numai dacă au coordonatele corespondente egale. Deci $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow x - 2y = 1$, $x + y = 2$. Rezolvînd acest sistem găsim

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

7. Fie $(\bar{a}, \bar{b})$ o bază în V și vectorii $\bar{u}(-1, 1), \bar{v}\left(\pi, \sqrt{2}\right), \bar{w}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Să se calculeze, coordonatele vectorilor următori

$$\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}, \qquad \bar{u} + \bar{v} - \bar{w},$$

$$2\bar{u} + 3\bar{v} - \bar{w}, \qquad \bar{u} - \bar{v} - \frac{2}{3}\bar{w}.$$

$$\sqrt{2}\bar{u} - \bar{v} + 2\bar{w}, \qquad \bar{u} + \frac{1}{\pi}\bar{v} - 4\bar{w}.$$

Soluție. Întrucît tehnica de calcul este esențial aceeași ne oprim la următorul caz, celelalte rămînînd drept teme.
$\bar{u} + \frac{1}{\pi}\bar{v} - 4\bar{w} = (-\bar{a} + \bar{b}) + \frac{1}{\pi}(\pi\bar{a} + \sqrt{2}\bar{b}) - 4\left(\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{3}{2}\bar{b}\right) =$ (distributivitatea înmulțirii cu numere reale față de adunarea vectorilor, asociativitatea și comutativitatea adunării vectorilor), $-\bar{a} + \bar{b} + \bar{a} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\bar{b} - 2\bar{a} + 6\bar{b} =$ (asociativitatea adunării și distributivitatea înmulțirii față de adunarea numerelor reale), $-2\bar{a} + \left(7 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)\bar{b}$. Deci coordonatele vectorului $\bar{u} + \frac{1}{\pi}\bar{v} - 4\bar{w}$ sînt $\left(-2, 7 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)$. Acestea puteau fi găsite și direct ținînd seama că „coordonatele unei sume algebrice sînt suma algebrică a coordonatelor".

§ 5. Proiecție ortogonală

Fie $\bar{a} \in V$ și d o dreaptă din plan. Notăm reprezentantul lui $\bar{a}$ prin $\overrightarrow{AB}$. Presupunem că $\overrightarrow{AB}$ nu este nul, iar dreapta AB nu este perpendiculară pe d. Prin A și B ducem dreptele h și k respectiv perpendiculare pe d. Notăm $\{A'\} = h \cap d$, $\{B'\} = k \cap d$ și construim $\overrightarrow{A'B''} \sim \overrightarrow{AB}$ (fig. I. 26). Segmentul $\overrightarrow{A'B'}$ este proiecția ortogonală a lui $\overrightarrow{AB}$ sau a lui $\overrightarrow{A'B''}$ pe d.

T e o r e m ă. *Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de reprezentantul $\overrightarrow{AB}$ al lui $\bar{a}$.*

Demonstrație. Fie $\overrightarrow{CD}$ un alt reprezentant al lui $\bar{a}$, iar $\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{C'D''}$ segmentele orientate construite după același procedeu ca și $\overrightarrow{A'B'}$, respectiv $\overrightarrow{A'B''}$. Trebuie să arătăm că $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{C'D'}$ (fig. I.26).

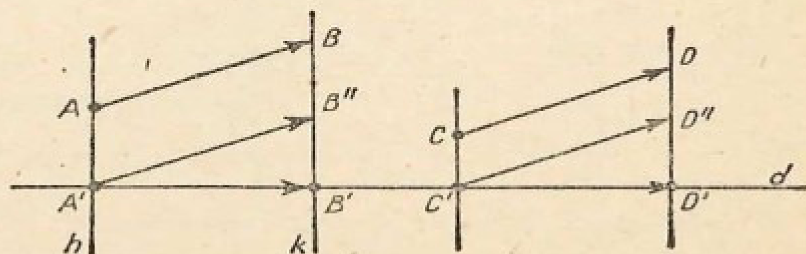


Fig. I.26

Segmentele $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{C'D'}$ au: (1) aceeași direcție deoarece sînt situate pe dreapta d, (2) același sens deoarece B' se află la dreapta lui A', iar D' se află la dreapta

lui C', (3) aceeași lungime deoarece triunghiul $A'B'B''$ este congruent cu triunghiul $C'D'D''$. De aceea $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{C'D'}$.

Dacă dreapta AB este perpendiculară pe d, atunci $A' = B'$ și deci $A'B'$ este segmentul orientat nul. Dacă $a = 0$, adică $A = B$, atunci din nou $A' = B'$ și deci $\overrightarrow{A'B'}$ este segmentul orientat nul.

Explicațiile precedente justifică următoarea definiție.

Definiție. **Vectorul liber $\overline{A'B'}$ se numește proiecția ortogonală a vectorului a pe dreapta d și se notează cu $\pi_d(\bar{a})$.**

Teoremă. *Un vector liber are aceeași proiecție ortogonală pe două drepte paralele.*

Demonstrație. Fie vectorul $\bar{a}$ reprezentat de $\overrightarrow{AB}$ și d, d' două drepte paralele. Cazurile $A = B$ și $A \neq B$, $AB \perp d, d'$ sînt lăsate drept temă. Situația standard este prezentată de figura I. 27 în care $h, k \perp d$, $A \in d$, $\{E\} = k \cap d$, $\{F\} = h \cap d'$, $\{G\} = k \cap d'$. Rezultă că $FGEA$ este un dreptunghi și deci $\overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{FG}$.

Din această teoremă rezultă că proiecția ortogonală a unui vector liber pe o dreaptă d nu depinde decît de direcția lui d. De aceea dacă $\bar{u}$ este un vector nenul, de aceeași direcție cu d, atunci în loc de *proiectia ortogonală a lui $\bar{a}$ pe d și notația* $\pi_d(\bar{a})$ vom utiliza denumirea de *proiecția ortogonală a lui $\bar{a}$ pe vectorul nenul $\bar{u}$ și notația* $\pi_u(\bar{a})$.

Teoremă. *Fie $\bar{u} \in V - \{\bar{0}\}$. Pentru orice $\bar{a}$, $\bar{b} \in V$ și orice număr real t avem*

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{a} + \bar{b}) = \pi_{\bar{u}}(\bar{a}) + \pi_u(\bar{b}),$$
$$\pi_u(t\bar{a}) = t\pi_u(\bar{a}).$$

Proprietățile cuprinse în această teoremă arată că $\pi_{\bar{u}}: V \to V$, $\bar{a} \to \pi_u(\bar{a})$ este ceea ce se numește o *funcție liniară*.

Fie $\bar{u}$ un vector liber nenul și $\bar{u}_0$ versorul său, adică $\bar{u} = \| \bar{u} \| \bar{u}_0$, $\| \bar{u}_0 \| = 1$. Dacă $\bar{a}$ este un vector liber arbitrar, atunci $\pi_u(\bar{a})$ este un vector coliniar cu u_0 și deci există un număr real $pr_u\bar{a}$ astfel încît $\pi_u(\bar{a}) = (pr_u\bar{a})\bar{u}_0$ (fig. I.28).

Definiție. **Numărul real $pr_u\bar{a}$ definit prin relația $\pi_u(\bar{a}) = (pr_u\bar{a})\bar{u}_0$ se numește mărimea algebrică a proiecției ortogonale $\pi_u(\bar{a})$**

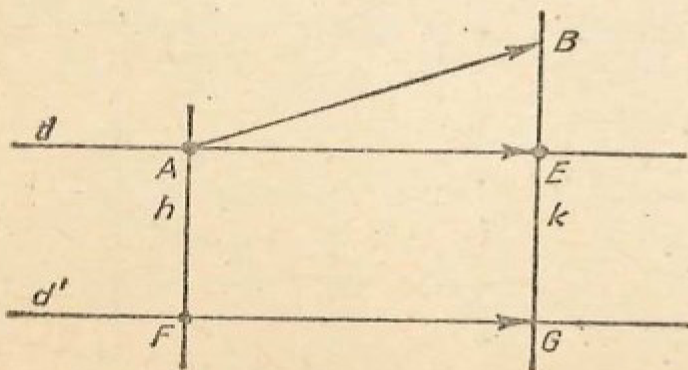


Fig. I. 27

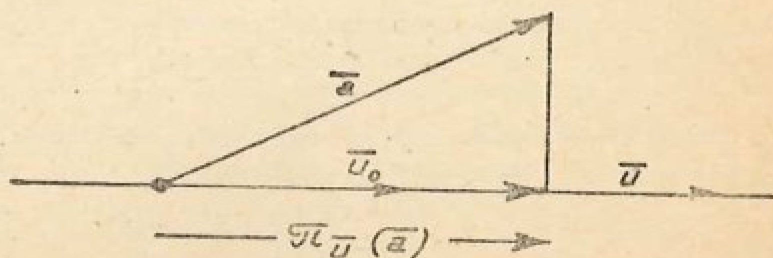


Fig. I. 28

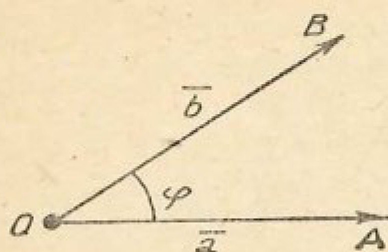


Fig. I. 29

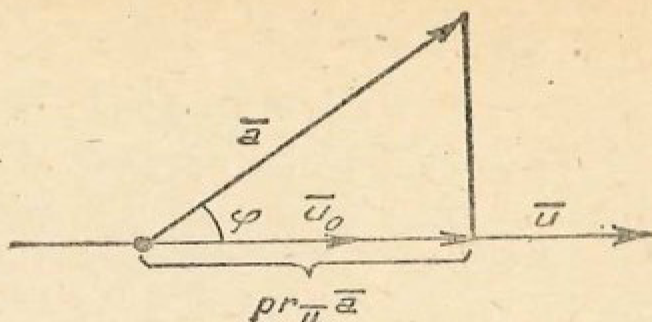


Fig. I. 30

Proprietățile lui $\pi_{\bar{u}}$ implică

$$pr_{\bar{u}}(\bar{a} + \bar{b}) = pr_{\bar{u}}\bar{a} + pr_{\bar{u}}\bar{b},$$
$$pr_{\bar{u}}(t\bar{a}) = t\,pr_{u}\bar{a},\ \forall \bar{a},\ \bar{b} \in V,\ \forall t \in \mathbf{R}.$$

Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori liberi nenuli și $\overrightarrow{OA}$, respectiv $\overrightarrow{OB}$ reprezentanții acestor vectori. Unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ se numește *unghiul* dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. I.29). Această definiție este corectă întrucît originea comună O a reprezentanților nu joacă nici un rol. Dacă cel puțin unul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este vectorul zero, atunci unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este nedeterminat.

Vectorii nenuli $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numesc *ortogonali* dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$. Admitem că $\bar{0}$ este ortogonal pe orice vector.

Cunoașterea unghiului φ dintre vectorul $\bar{a}$ și vectorul nenul $\bar{u}$ permite să explicităm numărul $pr_{u}\bar{a}$ în funcție de $\| \bar{a} \|$ și de cos φ (fig. I.30),

$$pr_{u}\bar{a} = \| \bar{a} \| \cos \varphi.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau vectorii nenuli $\bar{a}$, $\bar{b}$. Ce relație trebuie să existe între $\bar{a}$ și $\bar{b}$ pentru ca vectorul $\bar{u} = \bar{a} + \bar{b}$ să aibă direcția bisectoarei unghiului determinat de reprezentanții $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ai lui $\bar{a}$ respectiv $\bar{b}$? În această ipoteză să se expliciteze $\pi_{u}(\bar{a})$, $\pi_{\bar{u}}(\bar{b})$, $\pi_{\bar{u}}(\bar{a} + \bar{b})$ și relația dintre acești vectori.

Soluție (fig. I.31). Se observă că reprezentantul lui $\bar{u}$ este $\overrightarrow{AC}$, figura $ABCD$ fiind un paralelogram. Dacă AC este bisectoarea unghiului BAD, atunci $ABCD$ este un romb. Rezultă $\| \bar{a} \| = \| \bar{b} \|$.

Evident $AC \perp BD$, ca diagonale în rombul $ABCD$. Notînd $\{O\} = AC \cap BD$, segmentul orientat $\overrightarrow{AO}$ este reprezentantul lui $\pi_{\bar{u}}(\bar{a})$ și al lui $\pi_{\bar{u}}(\bar{b})$. Deci $\pi_{u}(\bar{a}) = \pi_{\bar{u}}(\bar{b})$. Pe de altă parte, $\pi_{u}(\bar{a} + \bar{b}) = \pi_{\bar{u}}(\overline{AC}) = \overline{AC} = 2\overline{AO}$, $\overline{AO} = \overline{OC}$, adică $\pi_{\bar{u}}(\bar{a} + \bar{b}) = \pi_{u}(\bar{a}) + \pi_{\bar{u}}(\bar{b})$.

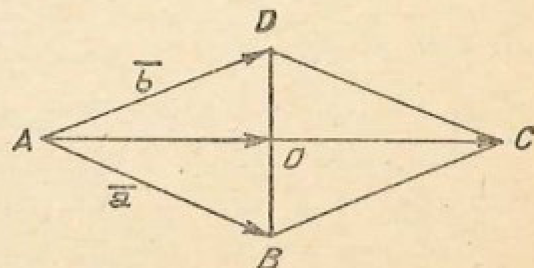


Fig. I.31

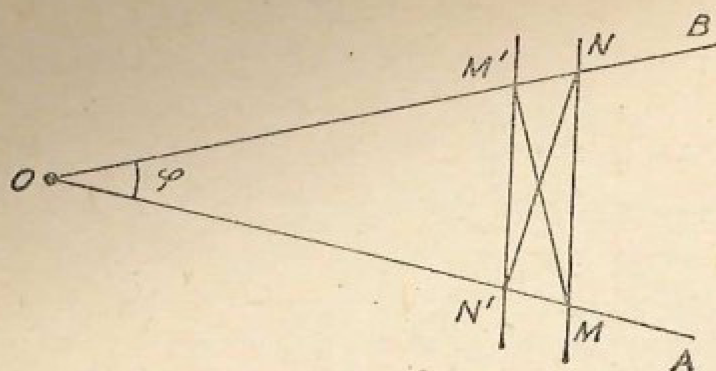


Fig. I.32

2. Fie semidreptele $[OA$, $[OB$ și φ măsura unghiului determinat de ele. Fie $M \in |OA$ și $N \in |OB$ astfel încît $d(O, M) = d(O, N)$. Notăm proiecția ortogonală a lui M pe OB cu M', iar proiecția ortogonală a lui N pe OA cu N'. Să se arate că:

1) $\mathrm{pr}_{\overline{ON}}\, OM = \mathrm{pr}_{\overline{OM}} ON$,

2) dreptele MN și $M'N'$ sînt paralele.

Soluție (fig. I.32). 1) Evident, $\mathrm{pr}_{\overline{ON}}\overline{OM} = \|\overline{OM}\| \cos\varphi = \|\overline{ON}\| \cos\varphi = \mathrm{pr}_{\overline{OM}}\overline{ON}$.

2) Fie $\frac{1}{\|\overline{OM}\|}\overline{OM}$ versorul lui $\overline{OM}$ și $\frac{1}{\|\overline{ON}\|}\overline{ON}$ versorul lui $\overline{ON}$. Găsim $\overline{N'M'} = \overline{OM'} - \overline{ON'} = \pi_{\overline{ON}}(\overline{OM}) - \pi_{\overline{OM}}(\overline{ON}) = (\mathrm{pr}_{\overline{ON}}\overline{OM})\frac{1}{\|\overline{OM}\|}\overline{OM} - (\mathrm{pr}_{\overline{OM}}\overline{ON})\frac{1}{\|\overline{ON}\|}\overline{ON} = (\cos\varphi)(\overline{OM} - \overline{ON}) = (\cos\varphi)\,\overline{NM}$, adică vectorii nenuli $\overline{N'M'}$ și $\overline{NM}$ sînt coliniari. Deci $MN \parallel M'N'$.

T e m ă. Comparați la 2) — soluția cu varianta sintetică.

§6. Produs scalar

Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori liberi. Dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$ și $\bar{b} \neq \bar{0}$, atunci notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

D e f i n i ț i e. Numărul real

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{cases} \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \cos\varphi, & \text{dacă } \bar{a} \neq \bar{0}, \text{ și } \bar{b} \neq \bar{0}, \\ 0 & \text{, dacă } \bar{a} = \bar{0} \text{ sau } \bar{b} = \bar{0} \end{cases}$$

se numește produsul scalar al vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Altfel spus produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul lungimilor lor prin cosinusul unghiului dintre ei, compromisul pentru vectorul zero fiind evident în consens cu definiția inițială.

Produsul scalar a doi vectori nenuli este un număr strict pozitiv dacă unghiul dintre ei este ascuțit, adică $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, sau strict negativ dacă unghiul dintre ei este obtuz, adică $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Produsul scalar este nul dacă și numai dacă cei doi vectori sînt ortogonali.

Asociind fiecărei perechi de vectori liberi produsul lor scalar obținem o funcție $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ numită *produs scalar* pe V.

T e o r e m ă. *Produsul scalar are următoarele proprietăți:*

1) *comutativitate:* $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V$;

2) *omogenitate:* $t(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (t\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (t\bar{b})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$;

3) *distributivitate față de adunare:* $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$, $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$;

4) *pozitivitate:* $\bar{a} \cdot \bar{a} = \|\bar{a}\|^2 \geqslant 0$, $\forall \bar{a} \in V$; $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$.

Demonstrație. 1) Dacă $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\bar{b} = \bar{0}$, atunci $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} = 0$; dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$ și $\bar{b} \neq \bar{0}$, atunci $\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \varphi = \|\bar{b}\| \|\bar{a}\| \cos \varphi = \bar{b} \cdot \bar{a}$; am ținut seama de comutativitatea produsului numerelor reale și de faptul că unghiul dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$ coincide cu unghiul dintre $\bar{b}$ și $\bar{a}$.

2) T e m ă.

3) Cazul $\bar{a} = \bar{0}$ este evident. Pentru a demonstra această proprietate în ipoteza $\bar{a} \neq \bar{0}$ ne ajutăm de noțiunea de mărime algebrică a unei proiecții ortogonale.

Fie $\bar{e}$ un versor și $\bar{b}$ un vector oarecare. Se observă că $\mathrm{pr}_{\bar{e}}\bar{b} = \bar{e} \cdot \bar{b}$, adică măsura algebrică a proiecției ortogonale a vectorului $\bar{b}$ pe versorul $\bar{e}$ este produsul scalar dintre $\bar{b}$ și $\bar{e}$.

Exprimăm pe $\bar{a} \neq \bar{0}$ în forma $\bar{a} = \|\bar{a}\| \bar{e}$, $\|\bar{e}\| = 1$. Relația $\mathrm{pr}_{\bar{e}}(\bar{b} + \bar{c}) = \mathrm{pr}_{\bar{e}}\bar{b} + \mathrm{pr}_{\bar{e}}\bar{c}$ este echivalentă cu $\bar{e} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{e} \cdot \bar{b} + \bar{e} \cdot \bar{c}$. Înmulțind cu $\|\bar{a}\|$ și ținînd seama de 2) deducem $(\|\bar{a}\| e) \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (\|\bar{a}\| \bar{e}) \cdot b + (\|\bar{a}\| \bar{e}) \cdot \bar{c}$, c.c.t.d.

4) Demonstrația este imediată. Facem însă observația că relația $\bar{a} \cdot \bar{a} = \|\bar{a}\|^2$ este echivalentă cu $\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}$, ultima permițînd calculul lungimii vectorului liber $\bar{a}$ dacă cunoaștem produsul scalar $\bar{a} \cdot \bar{a}$.

Definiția și proprietățile produsului scalar conferă spațiului vectorial al vectorilor liberi din plan o structură de *spațiu euclidian.*

Consecințe. 1) Relația $|\cos \varphi| \leqslant 1$ implică *inegalitatea Cauchy*

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leqslant \|\bar{a}\| \|\bar{b}\|.$$

Astfel modulul produsului scalar a doi vectori este cel mult egal cu produsul lungimilor celor doi vectori. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow \cos \varphi = 1$, adică $\varphi = 0$ sau $\pi \Leftrightarrow$ cei doi vectori sînt coliniari.

2) Inegalitatea lui Cauchy implică *inegalitatea triunghiului (Minkowski)*

$$\|\bar{a} + \bar{b}\| \leqslant \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|.$$

Într-adevăr, $\|\bar{a} + \bar{b}\| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})} = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a} + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{b}} = \sqrt{\|\bar{a}\|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \|\bar{b}\|^2} \leqslant \sqrt{\|\bar{a}\|^2 + 2\|\bar{a}\| \|\bar{b}\| + \|\bar{b}\|^2} = \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$.

Evident avem egalitate $\Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a} \cdot \bar{b}| = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}$ (sînt coliniari și) au același sens.

3) Fie $(\bar{u}, \bar{v})$ o bază în V și $\bar{a} = r_1\bar{u} + s_1\bar{v}$, $\bar{b} = r_2\bar{u} + s_2\bar{v}$.

Proprietățile produsului scalar implică

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (r_1\bar{u} + s_1\bar{v}) \cdot (r_2\bar{u} + s_2\bar{v}) = \ldots = r_1r_2(\bar{u} \cdot \bar{u}) + (r_1s_2 + r_2s_1)(\bar{u} \cdot \bar{v}) + s_1s_2(\bar{v} \cdot \bar{v}).$$

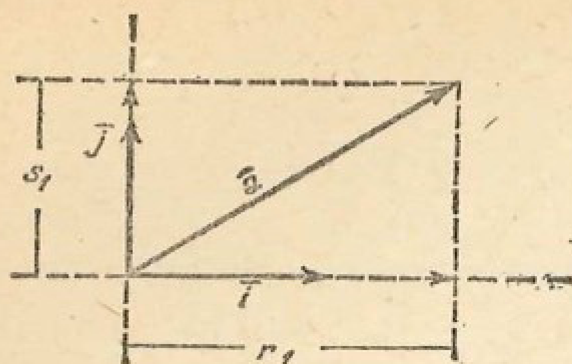


Fig. I.33

Cu alte cuvinte produsul scalar $\bar{a} \cdot \bar{b}$ va fi cunoscut dacă se dă tabelul 1. Pentru calcule este avantajos să alegem baze pentru care tabelul 1 să fie cît mai simplu posibil. Acesta este şi cazul bazelor formate din versori ortogonali.

$\cdot$	$\bar{u}$	$\bar{v}$
$\bar{u}$	$\bar{u} \cdot \bar{u}$	$\bar{u} \cdot \bar{v}$
$\bar{v}$	$\bar{v} \cdot \bar{u}$	$\bar{v} \cdot \bar{v}$

TABELUL 1

$\cdot$	$\bar{i}$	$\bar{j}$
$\bar{i}$	$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1$	$\bar{i} \cdot \bar{j} = 0$
$\bar{j}$	$\bar{j} \cdot \bar{i} = 0$	$\bar{j} \cdot \bar{j} = 1$

TABELUL 2

Bază ortonormată. O bază din V formată din versori ortogonali se numeşte *bază ortonormată*. Fie $(\bar{i}, \bar{j})$ o bază ortonormată, adică o bază care satisface relaţiile din tabelul 2. Coordonatele unui vector $\bar{a}$ (fig. I.33), în raport cu o asemenea bază, se numesc *coordonate euclidiene*. Presupunînd $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j}$, se observă că $\bar{i} \cdot \bar{a} = r_1 = \mathrm{pr}_{\bar{i}}\bar{a}$, $\bar{j} \cdot \bar{a} = s_1 = \mathrm{pr}_{\bar{j}}\bar{a}$, adică coordonatele euclidiene sînt măsurile algebrice ale proiecţiilor ortogonale pe versorii $\bar{i}$, respectiv $\bar{j}$.

Dacă $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j}$, $\bar{b} = r_2\bar{i} + s_2\bar{j}$, atunci se constată $\bar{a} \cdot \bar{b} = r_1r_2 + s_1s_2$, adică produsul scalar a doi vectori raportaţi la aceeaşi bază ortonormată este suma produselor coordonatelor corespondente. În particular, punînd $\bar{a} = \bar{b}$ găsim

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{r_1^2 + s_1^2},$$

adică lungimea unui vector este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor coordonatelor euclidiene.

Se observă că

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow r_1r_2 + s_1s_2 = 0,$$

adică doi vectori raportaţi la aceeaşi bază ortonormată sînt ortogonali, dacă şi numai dacă suma produselor coordonatelor corespondente este nulă. Mai mult, pentru $\bar{a}, \bar{b} \in V - \{\bar{0}\}$, avem

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\|} \frac{r_1r_2 + s_1s_2}{\sqrt{r_1^2 + s_1^2}\sqrt{r_2^2 + s_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Ştiind că $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$, $\bar{a} = 1$, $\|\bar{b}\| = 1$, $\|\bar{c}\| = 1$, să se calculeze $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$.

Soluţie. Prin definiţie $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \bar{0} \cdot \bar{0} = 0$. Ţinînd seama de distributivitatea faţă de adunare găsim $\bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a} + \bar{c} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{c} = 0$; pozitivitatea şi comutativitatea implică $\|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 + \|\bar{c}\|^2 + 2(\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}) = 0$. Deci $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a} = -\frac{3}{2}$.

2. Să se verifice că vectorii

$$\bar{u} = (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c} - (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b}, \quad \bar{v} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a} - \bar{b}$$

sînt ortogonali față de $\bar{a}$.

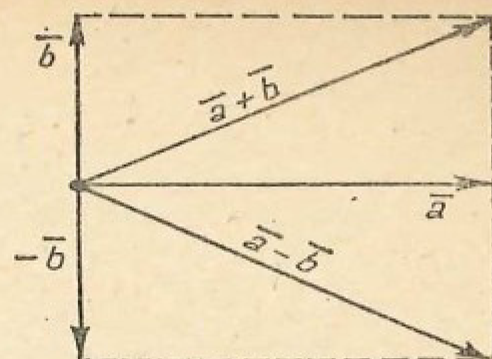


Fig. I.34

Soluție. Efectuăm $\bar{a}\cdot\bar{u}$ ținînd seama de distributivitate și omogenitate,

$$\bar{a}\cdot\bar{u} = \bar{a}\cdot[(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c} - (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}] = \bar{a}\cdot[(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}] - \bar{a}\cdot[(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}] =$$
$$= (\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{a}\cdot\bar{c}) - (\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{a}\cdot\bar{b}) = 0.$$

Analog, se calculează $\bar{a}\cdot\bar{v}$.

3. Să se arate că dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt ortogonali, atunci vectorii $\bar{a}+\bar{b}$ și $\bar{a}-\bar{b}$ au normele egale.

Soluție (fig. I.34, cazul vectorilor nenuli). Trebuie să demonstrăm implicația

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \Rightarrow \|\bar{a}+\bar{b}\| = \|\bar{a}-\bar{b}\|.$$

Într-adevăr,

$$\|\bar{a}+\bar{b}\| = \sqrt{(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})} = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{b}} = \sqrt{\|\bar{a}\|^2+\|\bar{b}\|^2},$$

$$\|\bar{a}-\bar{b}\| = \sqrt{(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})} = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}-2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{b}} = \sqrt{\|\bar{a}\|^2+\|\bar{b}\|^2}.$$

4. Știind că $\|\bar{u}\| = 1$, $\|\bar{v}\| = \sqrt{2}$, iar unghiul φ dintre $\bar{u}$ și $\bar{v}$ este $\frac{\pi}{3}$, să se determine r astfel încît $\bar{a} = r\bar{u}+\bar{v}$, $\bar{b} = -\bar{u}+2\bar{v}$ să fie ortogonali.

Soluție. Condiția $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ este echivalentă cu $(r\bar{u}+\bar{v})\cdot(-\bar{u}+2\bar{v}) = 0$ sau $-r(\bar{u}\cdot\bar{u}) + (2r-1)\bar{u}\cdot\bar{v}+2\bar{v}\cdot\bar{v} = 0$. Deoarece $\bar{u}\cdot\bar{v} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, găsim

$$-r+(2r-1)\frac{\sqrt{6}}{2}+4 = 0, \quad \text{adică} \quad r = \frac{3\sqrt{6}-8}{2\sqrt{6}}.$$

5. Se știe că vectorul $\bar{a}+\bar{b}$ este perpendicular pe vectorul $\bar{a}-3\bar{b}$, iar vectorul $3\bar{a}-2\bar{b}$ este perpendicular pe vectorul $\bar{a}-\bar{b}$. Să se găsească $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Soluție. Relația $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-3\bar{b}) = 0$ este echivalentă cu $\|\bar{a}\|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}-3\|\bar{b}\|^2 = 0$, iar relația $(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(2\bar{a}+\bar{b}) = 0$ este echivalentă cu $2\|\bar{a}\|^2-3\bar{a}\cdot\bar{b}-2\|\bar{b}\|^2 = 0$. Eliminînd termenul care conține pe $\bar{a}\cdot\bar{b}$ găsim $\|\bar{a}\|^2+5\|\bar{b}\|^2 = 0$. Deci $\|\bar{a}\| = 0$, $\|\bar{b}\| = 0$, adică $\bar{a} = \bar{b} = \bar{0}$.

6. Utilizînd produsul scalar și definiția liniar independenței, să se arate că orice doi vectori nenuli ortogonali sînt liniar independenți.

Soluție. Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori nenuli, cu proprietatea $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$. Relația $r\bar{a}+s\bar{b} = \bar{0}$ implică $(r\bar{a}+s\bar{b})\cdot\bar{a} = 0$, $(r\bar{a}+s\bar{b})\cdot\bar{b} = 0$, adică $r\|\bar{a}\|^2+s(\bar{b}\cdot\bar{a}) = 0$, $r(\bar{a}\cdot\bar{b})+s\|\bar{b}\|^2 = 0$. Acestea din urmă împreună cu ipotezele implică $r = 0$ și $s = 0$.

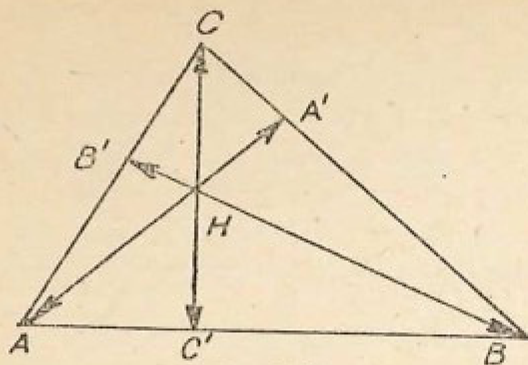


Fig. I.35

7. Să se arate că înălțimile unui triunghi sînt concurente.

Soluție. Fie înălțimile AA' și CC' și H punctul lor de intersecție. Unim pe B cu H și prelungim segmentul $[BH]$ pînă în B' (fig. I.35). Deoarece $\overline{BC}=\overline{HC}-\overline{HB}$, $\overline{AB}=\overline{HB}-\overline{HA}$, relațiile $AA'\perp BC$, $CC'\perp AB$ sînt echivalente cu $\overline{HA}\cdot(\overline{HC}-\overline{HB})=0$, $\overline{HC}\cdot(\overline{HB}-\overline{HA})=0$. Aceste două egalități implică $\overline{HB}\cdot(\overline{HA}-\overline{HC})=0$, adică $\overline{HB}\cdot\overline{CA}=0$ sau $HB'\perp CA$.

T e m ă. Comparați soluția vectorială cu cea sintetică:

8. În V se fixează o bază ortonormată $(\bar{i}, \bar{j})$.

1) Să se calculeze

$(\bar{i}-\bar{j})\cdot(2\bar{i})$, $(2\bar{i}+3\bar{j})\cdot(\pi\bar{i}-\sqrt{2}\bar{j})$.

2) Să se determine unghiul vectorilor

$\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{i}-2\bar{j}$.

3) Să se arate că vectorii

$2\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{i}+2\bar{j}$

sînt liniar independenți.

Soluție. 1), 2). Se folosesc formulele stabilite la partea teoretică. Deci

$$(\bar{i}-\bar{j})\cdot(2\bar{i})=2,\quad (2\bar{i}+3\bar{j})\cdot(\pi\bar{i}-\sqrt{2}\bar{j})=2\pi-3\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot1+1\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{10}},\ \text{adică}\ \varphi=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

3) Reamintim că doi vectori nenuli raportați la aceeași bază sînt necoliniari (sau liniar independenți) numai dacă nu au coordonatele proporționale. În cazul nostru

$$\frac{2}{1}\neq\frac{1}{2}$$

și de aceea cei doi vectori nu sînt coliniari.

§ 7. Probleme propuse

1. 1) Să se arate că două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sînt echipolente, dacă și numai dacă segmentele orientate $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{CB}$ au același mijloc.

2) Fie A, A', B, B' patru puncte în plan. Dacă notăm cu M, N două puncte din același plan, astfel încît $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AA'}$ și $\overline{BN}=\frac{1}{2}BB'$, să se arate că $2\overline{MN}=\overline{AB}+\overline{A'B'}$.

Indicație. 1) Mijlocul segmentului orientat $\overrightarrow{AD}$ este un punct O de pe dreapta AD cu proprietatea $d(A, O)=d(O, D)$. Se vor cerceta separat cazurile: punctele A, B, C, D coliniare, punctele A, B, C, D necoliniare. În cazul necoliniarității, $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow ABCD$ este un paralelogram $\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{CB}$ au același mijloc.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Se notează cu O_1, O_2, mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$. Să se arate că:

1) $2\overline{O_1O_2} = \overline{AD} - \overline{BC}$,

2) dacă $4\overline{O_1O_2} = \overline{AD} - \overline{BC}$, atunci $ABCD$ este un paralelogram.

Indicație. 1) $\overline{O_1O_2} = \overline{AO_1} + \overline{O_2D} - \overline{BC} = \overline{O_1A} + \overline{AD} + \overline{DO_2}$.

2) Relațiile din 1) și 2) implică $\overline{O_1O_2} = \overline{0}$.

3. Se dau vectorii $\bar{u} = -4\bar{i} + 5\bar{j}$, $\bar{v} = 6\bar{i} - 9\bar{j}$, $\bar{w} = -2\bar{i} - 9\bar{j}$.

Să se calculeze $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$, $\bar{u} - \bar{v}$, $\bar{v} - \bar{w}$.

4. Trei vectori au suma egală cu $\bar{0}$, și sînt necoliniari. Notînd cu $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ respectiv $\overrightarrow{OC}$ reprezentanții celor trei vectori, să se arate că O este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Indicație. Pe $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OC}$ construim paralelogramul $OAB'C$. Notînd cu E centrul paralelogramului $OAB'C$ găsim $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OE}$.

5. Fie triunghiul ABC și A', B', C' mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1) Să se arate că pentru orice punct M al planului avem

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MA} + 2\overline{AA'} = 3\overline{MB} + 2\overline{BB'} = 3\overline{MC} + 2\overline{CC'}.$$

2) Să se arate că există un punct G și numai unul *(centrul de greutate* al triunghiului ABC) cu proprietatea

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}.$$

3) Să se demonstreze că orice punct M al planului satisface relația

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}.$$

Indicație. 2) Se ține seama de relațiile din 1).

6. Fie două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ de centre de greutate G și G'. Să se verifice relația $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\overline{GG'}$ și cu ajutorul acesteia să se dea o condiție necesară și suficientă pentru ca cele două triunghiuri să aibă același centru de greutate.

Indicație. Fie A_1 mijlocul lui $[BC]$, A_1' mijlocul lui $[B'C']$ etc. Rezultă: $\overline{AA'} = \frac{3}{2}\overline{AA_1} + \overline{GG'} + \frac{2}{3}\overline{A_1'A'}$ și alte două relații analoage.

7. În vîrfurile unui pătrat cu latura a se află sarcinile electrice pozitive egale cu $+q$. În centrul pătratului se pune o sarcină electrică negativă $-Q$. Să se calculeze raportul $\frac{Q}{q}$ astfel încît forțele care acționează asupra fiecăreia din cele patru sarcini electrice q să aibă rezultanta egală cu zero.

R. Se ține seama de legea lui Coulomb. Asupra fiecărei sarcini electrice q acționează patru forțe al căror echilibru conduce la relația $\frac{Q}{q} = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2})$.

8. Fie punctele A, B, C, D și numerele a, b, c, fixate. Pentru fiecare $x \in \mathbf{R}$ definim punctele M, N, P, Q prin

$$\overline{BM} = (a + x)\overline{BA}, \quad \overline{BN} = (b - x)\overline{BC},$$
$$\overline{DQ} = (b + x)\overline{DA}, \quad \overline{DP} = (c - x)\overline{DC}.$$

Să se verifice că $\overline{MP} + \overline{NQ}$ este un vector constant.

Indicație. $\overline{MP} + \overline{NQ}$ se exprimă în funcție de a, b, c și de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

9. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat înscris în cercul de centru O și rază R.

1) Fixînd baza $(\overline{OA}, \overline{OB})$ să se găsească coordonatele vectorilor $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$.

2) Să se arate că $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} = \overline{0}$.

R. $\overline{OC}\left(-1, \frac{1}{2\cos 36^\circ}\right)$, $\overline{OD}\left(-\frac{1}{2\cos 36^\circ}, -\frac{1}{2\cos 36^\circ}\right)$, $\overline{OE}\left(\frac{1}{2\cos 36^\circ}, -1\right)$.

10. Fie A, B, C trei puncte în plan, astfel încît vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ să fie liniar independenți.

1) Să se arate că relația $\overline{MB} = t_1\overline{MC}$ definește un punct M din plan, dacă $t_1 \in \mathbf{R} - \{1\}$ iar vectorii $\overline{MB}$ și $\overline{BC}$ sînt liniar dependenți.

2) Se consideră punctele N și P care verifică relațiile $\overline{NC} = t_2\overline{NA}$ și $\overline{PA} = t_3\overline{PB}$, $t_2, t_3 \in \mathbf{R} - \{1\}$. Să se exprime vectorii $\overline{PN}$ și $\overline{PM}$ în raport cu baza $(\overline{AB}, \overline{AC})$.

3) Ce relație trebuie să verifice numerele reale t_1, t_2, t_3 pentru ca vectorii $\overline{PN}$ și $\overline{PM}$ să fie liniar dependenți?

R. 1) $\overline{BC}$ este nenul și deci $\overline{MB} = r\overline{BC} = r(\overline{BM} + \overline{MC})$. Relația $\overline{MB} = t_1\overline{MC}$ și $B \neq C$ arată că $M \neq C$ și deci $r \neq -1$.

2) $\overline{PN} = \frac{t_3}{1 - t_3}\overline{AB} + \frac{1}{1 - t_2}\overline{AC}$, $\overline{PM} = \left(\frac{t_3}{1 - t_3} + \frac{t_1}{1 - t_1}\right)\overline{AB} - \frac{t_1}{1 - t_1}\overline{AC}$,

3) $t_1t_2t_3 = 1$.

11. Fie $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ definiți în raport cu baza $(\bar{a}, \bar{b})$ prin egalitățile $\bar{u} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$ $\bar{v} = x\bar{a} + 7\bar{b}$, $\bar{w} = 8\bar{a} + y\bar{b}$, $x, y \in \mathbf{R}$.

1) Pentru ce valoare $x \in \mathbf{R}$ vectorii $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sînt liniar dependenți?

2) Pentru ce valori $y \in \mathbf{R}$ vectorii $\bar{u}$ și $\bar{w}$ sînt liniar independenți?

R. 1) $x = -\frac{21}{2}$; 2) $y \neq -\frac{16}{3}$.

12. Fie $(\bar{i}, \bar{j})$ o bază ortonormată și vectorii $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{b} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{c} = 2\bar{i} + \bar{j}$ $\bar{d} = -\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{3}{4}\bar{j}$.

1) Să se calculeze normele acestor vectori.

2) Care sînt versorii asociați acestor vectori?

3) Să se calculeze $\bar{a} \cdot \bar{a}$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$, $\bar{b} \cdot \bar{b}$, $\bar{c} \cdot \bar{d}$.

13. Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori ortogonali și cu normele egale. Să se arate că vectorii care formează următoarele perechi sînt ortogonali:

1) $2\bar{a} + \bar{b}$ și $\bar{a} - 2\bar{b}$,

2) $\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{3}{5}\bar{b}$ și $-\frac{3}{5}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$,

3) $-0{,}2\bar{a} + 1{,}6\bar{b}$ și $-1{,}6\bar{a} - 0{,}2\bar{b}$.

14. Fie $(\bar{i}, \bar{j})$ o bază ortonormată a lui V și vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$.

1) Să se găsească vectorul $\bar{v}$ ortogonal pe $\bar{i}$ și care satisface condiția $\bar{a} \cdot \bar{v} = 3$.

2) Să se determine $\pi_{\bar{b}}(\bar{v})$ și mărimea algebrică a acestei proiecții.

R. 1) $\bar{v} = 3\bar{j}$; 2) Se determină t și $\bar{c} = x\bar{i} + y\bar{j}$ astfel încît $t\bar{b} + \bar{c} = \bar{v}$, $\bar{b} \cdot \bar{c} = 0$.

Rezultă $\pi_{\bar{b}}(\bar{v}) = \frac{6}{5}\bar{b}$, $\text{pr}_{\bar{b}}\,\bar{v} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

15. În triunghiul ABC, mediana corespunzătoare laturii $[AB]$ intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D. Să se arate că dacă mijlocul G al coardei $[CD]$ este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $2c^2 = a^2 + b^2$.

Indicație. Fie O centrul cercului circumscris;

$\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, $\overline{GC} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} - 2\overline{OC})$, $\overline{OG}\cdot\overline{CG} = 0 \Rightarrow 2\cos 2C - \cos 2A - \cos 2B = 0$; se ține seama de teorema sinusurilor.

16. Fie V spațiul vectorial al vectorilor liberi și $(\bar{u}, \bar{v})$ o bază în V. Notînd cu $\bar{a} = r\bar{u} + s\bar{v}$ un vector arbitrar din V, definim funcțiile $n_1: V \to [0, \infty)$, $n_1(\bar{a}) = \max\{|r|, |s|\}$, $n_2(\bar{a}) = \sqrt{r^2 + s^2}$, $n_3(\bar{a}) = |r| + |s|$. Să se arate că

$$n_1(\bar{a}) \leqslant n_2(\bar{a}) \leqslant n_3(\bar{a}) \leqslant 2n_1(\bar{a}),\quad n_1(\bar{a}) \leqslant n_2(\bar{a}) \leqslant \sqrt{2}\, n_1(\bar{a}),$$

$n_i(\bar{a}) = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} = 0$, $n_i(t\bar{a}) = |t|\, n_i(\bar{a})$, $n_i(\bar{a} + \bar{b}) \leqslant n_i(\bar{a}) + n_i(\bar{b})$, $t \in \mathbb{R}$, $\bar{b} \in V$.

Indicație. Primele relații se transcriu:

$$\max\{|r|, |s|\} \leqslant \sqrt{r^2 + s^2} \leqslant |r| + |s| \leqslant 2\max\{|r|, |s|\}.$$

Capitolul II

DREAPTA

§ 1. Reper cartezian

Geometria analitică în plan este o metodă care constă în studiul figurilor geometrice plane cu ajutorul numerelor reale sau a perechilor ordonate de numere reale. Prin aceasta raționamentelor sintetice li se substituie raționamente algebrice. Calculul vectorial poate servi ca instrument de bază în această convertire.

Fie planul p și V spațiul vectorial real al vectorilor liberi din acest plan. După cum s-a văzut în Capitolul 1, § 1, fixarea unui punct O în plan permite stabilirea unei bijecții naturale între p și V: fiecărui punct $M \in p$ i se atașează vectorul de poziție, $\bar{r} = \overline{OM}$, al punctului M față de *originea* O. Originii $O \in p$ îi corespunde vectorul de poziție $\bar{0} \in V$, iar simetricului lui M față de origine îi corespunde vectorul de poziție $-\bar{r}$.

Avînd în vedere unele avantaje în raționamente și calcule se preferă determinarea punctelor din p cu ajutorul vectorilor de poziție în raport cu originea O, iar pentru vectorii liberi se preferă reprezentarea lor în raport cu o bază ortonormată din V.

Definiție. **Fie O un punct din p și $(\bar{i}, \bar{j})$ o bază ortonormată a lui V. Ansamblul $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se numește reper cartezian în plan** (fig. II.1).

Punctul O se numește *originea reperului*, iar $(\bar{i}, \bar{j})$ se numește *baza reperului*. Coordonatele euclidiene (x, y) ale vectorului de poziție $\bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$ (fig. II.1) poartă numele de *coordonatele carteziene* ale punctului M față de reperul ortonormat $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$. Numărul real $x = \bar{i} \cdot \bar{r} = \mathrm{pr}_{\bar{i}}\bar{r}$ se numește *abscisă*, iar numărul real $y = \bar{j} \cdot \bar{r} = \mathrm{pr}_{\bar{j}}\bar{r}$ se numește *ordonată*. Fixarea unui reper cartezian în plan determină o bijecție între p și $\mathbb{R}^2$: fiecărui punct $M \in p$ i se atașează coordonatele carteziene. Această bijecție se numește *sistem de coordo-*

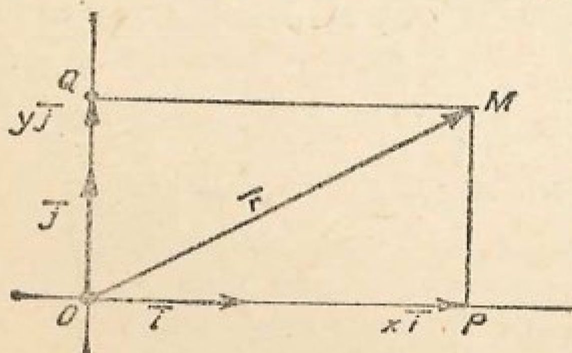


Fig. II.1

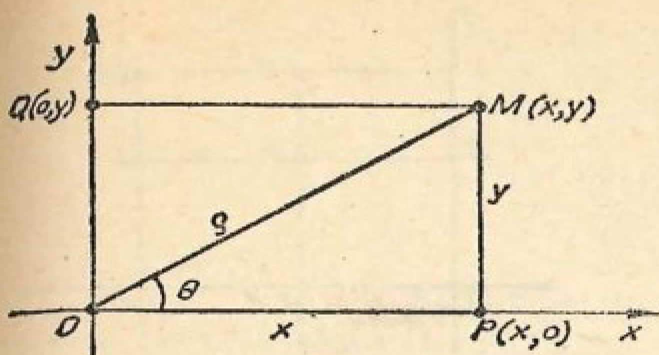


Fig. II.2

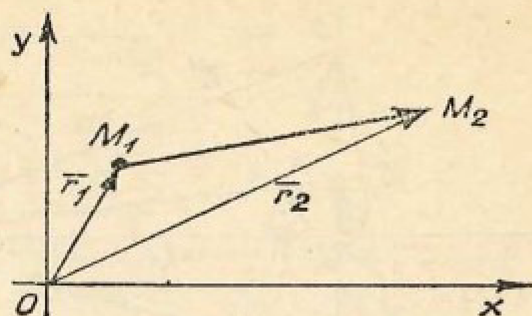


Fig. II.3

nate cartezian definit de reperul $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ pe mulţimea punctelor din plan şi se notează prin scrierea alăturată a punctului şi a coordonatelor sale, adică $M(x, y)$.

Axa determinată de punctul O şi de versorul $\bar{i}$ se numeşte *axa Ox* sau *axa absciselor*, iar axa determinată de punctul O şi de versorul $\bar{j}$ se numeşte *axa Oy* sau *axa ordonatelor*. Toate punctele de pe axa Ox sînt caracterizate prin faptul că au ordonata nulă; toate punctele de pe axa Oy sînt caracterizate prin faptul că au abscisa nulă.

Deseori reperul cartezian este indicat prin xOy, prin aceasta înţelegîndu-se că s-a fixat originea O şi axele ortogonale Ox şi Oy (fig. II.2). În acest caz versorii ortogonali $\bar{i}$ şi $\bar{j}$ rezultă din context.

Axele împart planul în patru regiuni

I : $x > 0$, $y > 0$; II : $x < 0$, $y > 0$; III : $x < 0$, $y < 0$; IV : $x > 0$, $y < 0$, *numite cadrane deschise*. Mulţimea $\{M(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y > 0\}$ se numeşte *semiplanul superior*, iar mulţimea $\{M(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y < 0\}$ se numeşte *semiplanul inferior*.

Fie $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper cartezian în plan şi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ două puncte date. Vectorul liber $\overline{M_1M_2}$ reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$ este diferenţa dintre vectorul de poziţie al extremităţii M_2 şi vectorul de poziţie al originii M_1 (fig. II.3). Deci

$$\overline{M_1M_2} = \overline{OM}_2 - \overline{OM}_1 = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}.$$

De aici obţinem distanţa dintre punctele M_1 şi M_2, anume

$$d(M_1, M_2) = \| \overline{M_1M_2} \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observaţie (fig. II. 2). Notăm lungimea $\|\bar{r}\|$ cu ρ şi unghiul dintre $\bar{i}$ şi $\bar{r}$ cu θ. Unghiul θ se consideră pe intervalul $[0, 2\pi)$. Rezultă $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, adică fiecărui punct $M \neq O$ din plan i se poate asocia o singură pereche ordonată de numere reale (ρ, θ), $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Numerele ρ şi θ se numesc *coordonatele polare* ale punctului M. Se scrie $M(\rho, \theta)$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se dau punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -3)$, $C(8, 0)$, $D(0, 4)$.

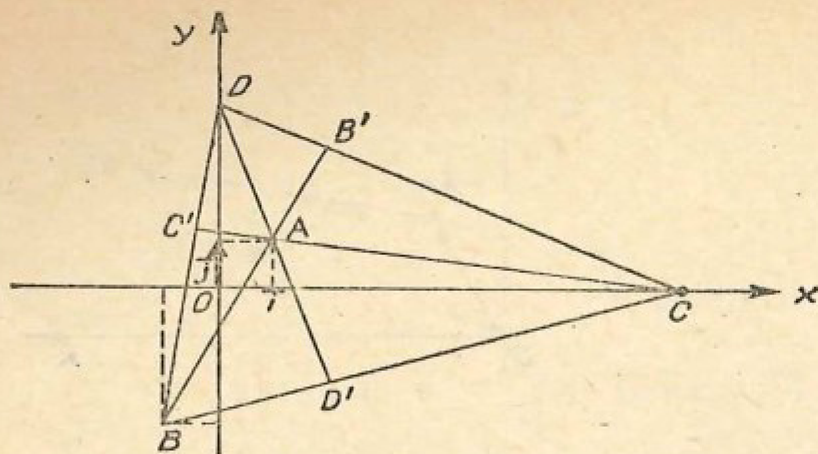


Fig. II.4

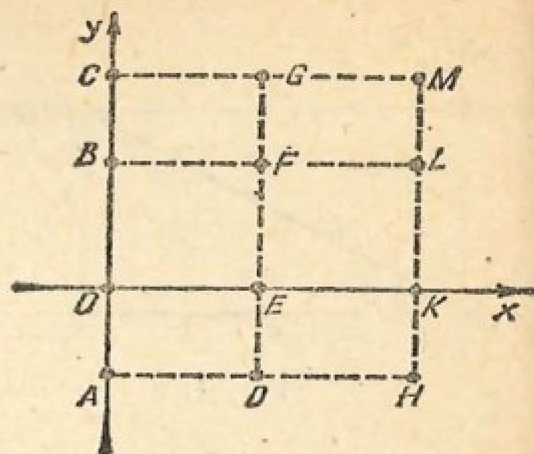


Fig. II.5

1) Să se scrie coordonatele vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$ și $\overline{BC}$.

2) Să se calculeze lungimile vectorilor $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ și $\sphericalangle ABC$.

3) Să se calculeze produsele scalare $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$, $\overline{AC} \cdot \overline{DB}$ și să se arate că fiecare dintre punctele A, B, C, D este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei puncte.

Soluție (fig. II.4). 1) Deoarece $\overline{OA} = \bar{i} + \bar{j}$, $\overline{OB} = -\bar{i} - 3\bar{j}$, rezultă $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-\bar{i} - 3\bar{j}) - (\bar{i} + \bar{j}) = -2\bar{i} - 4\bar{j}$. Deci $\overline{AB}$ are coordonatele $(-2, -4)$.

Analog $\overline{AC}(7, -1)$, $\overline{CD}(-8,4)$, $\overline{DB}(-1, -7)$, $\overline{BC}(9, 3)$.

2) Ținînd seama că $(\bar{i}, \bar{j})$ este o bază ortonormată găsim $\|\overline{BA}\| = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Analog $\|\overline{BC}\| = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$. Cu acestea găsim $\cos ABC = \dfrac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \|\overline{BC}\|} = \dfrac{(2\bar{i} + 4\bar{j}) \cdot (9\bar{i} + 3\bar{j})}{\|2\bar{i} + 4\bar{j}\| \cdot \|9\bar{i} + 3\bar{j}\|} = \dfrac{2 \cdot 9 + 4 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 4^2}\sqrt{9^2 + 3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, adică $\sphericalangle ABC = \dfrac{\pi}{4}$.

3) Deoarece $(\bar{i}, \bar{j})$ este o bază ortonormată calculele sînt următoarele

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = (-2\bar{i} - 4\bar{j}) \cdot (-8\bar{i} + 4\bar{j}) = (-2)(-8) + (-4)4 = 0,$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = (7\bar{i} - \bar{j}) \cdot (-\bar{i} - 7\bar{j}) = 7(-1) + (-1)(-7) = 0.$$

Rezultă $AB \perp CD$, $AC \perp DB$, adică fiecare dintre punctele A, B, C, D este ortocentrul triunghiului determinat de celelalte trei puncte.

2. În plan fixăm reperul cartezian xOy. Să se figureze punctele corespunzătoare elementelor mulțimii $\{0, 3, 6\} \times \{-2, 0, 3, 5\}$. Să se găsească cea mai mică și cea mai mare distanță dintre elementele acestei mulțimi. Există în această mulțime trei puncte care să determine un triunghi isoscel? Dar echilateral?

Soluție. Elementele produsului cartezian sînt date în tabelul 1. Dacă notăm $A(0, -2)$, $O(0,0)$, $B(0, 3)$, $C(0, 5)$, $D(3, -2)$, $E(3, 0)$, $F(3, 3)$, $G(3, 5)$, $H(6, -2)$, $K(6, 0)$, $L(6, 3)$, $M(6, 5)$ obținem figura II. 5.

TABELUL 1

x	−2	0	3	5
0	(0, −2)	(0, 0)	(0, 3)	(0, 5)
3	(3, −2)	(3, 0)	(3, 3)	(3, 5)
6	(6, −2)	(6, 0)	(6, 3)	(6, 5)

Se observă că $d(O, A) = 2$, iar figura II. 5 pune în evidență că acest număr reprezintă cea mai mică distanță. Analog, $d(A, M) = d(H, C) = \sqrt{85}$ este cea mai mare distanță.
Deoarece $d(B,O) = d(B, F)$, $OB \perp BF$ triunghiul OBF este dreptunghic isoscel. Nu există nici un triunghi echilateral întrucît triunghiurile isoscele ce se pot forma sînt fie dreptunghice, fie au lungimea jumătății bazei și lungimea înălțimii numere întregi.

§ 2. Dreapta determinată de un punct și de un vector director

Presupunem că planul a fost raportat la un reper cartezian. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct și $\bar{a}(u, v)$ un vector nenul. Există o singură dreaptă d care are direcția lui $\bar{a}$ și care trece prin M_0 (fig. II.6).

Teoremă. *Fie $\bar{r}_0$ vectorul de poziție al punctului M_0 și $\bar{r}$ vectorul de poziție al unui punct oarecare $M(x, y)$ din plan. Punctul M aparține dreptei d determinată de M_0 și de $\bar{a} \neq \bar{0}$ dacă și numai dacă*

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Demonstrație (fig. II.6). Punctul M aparține dreptei d dacă și numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ și $\bar{a}$ sînt coliniari. Deoarece $\bar{a}$ este nenul, aceasta este echivalent cu faptul că există $t \in \mathbf{R}$ astfel încît $\overline{M_0M} = t\bar{a}$. Ținînd seama că $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ rezultă relația din enunț.

Egalitatea $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}$, $t \in \mathbf{R}$ se numește *ecuația vectorială a dreptei* d, iar t se numește *parametru*. Deoarece $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$, $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}$, $\bar{a} = u\bar{i} + v\bar{j}$, ecuația vectorială este echivalentă cu două relații scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

care se numesc *ecuațiile parametrice ale dreptei d*.

Deci

$$d = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = x_0 + ut,\ y = y_0 + vt,\ t \in \mathbf{R}\}$$

sau mai scurt

$$d : x = x_0 + ut,\ y = y_0 + vt,\ t \in \mathbf{R}.$$

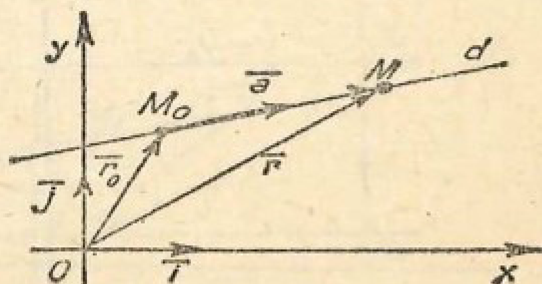


Fig. II.6

Vectorul nenul $\bar{a}(u, v)$ care dă direcția dreptei d se numește *vector director*. Coordo-

natele sale u și v se numesc *parametri directori ai dreptei d*. Evident orice vector $t\bar{a}$, $t \neq 0$, joacă același rol cu $\bar{a}$. În particular direcția lui d poate fi dată și prin versorul *director* $\bar{e} = \frac{1}{\|\bar{a}\|} \bar{a}$.

Exemplu. Punctul $M_0(1, -1)$ și vectorul $\bar{a}(-2, 1)$ determină dreapta d de ecuație vectorială $x\bar{i} + y\bar{j} = \bar{i} - \bar{j} + t(-2\bar{i} + \bar{j})$, $t \in \mathbb{R}$. Această ecuație vectorială este echivalentă cu ecuațiile parametrice $x = 1 - 2t$, $y = -1 + t$, $t \in \mathbb{R}$ sau cu ecuația carteziană $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1}$. Versorul director al lui d este $\frac{1}{\|\bar{a}\|} \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\bar{i} + \bar{j})$.

Dacă $uv \neq 0$, atunci ecuațiile parametrice sînt echivalente cu ecuația carteziană

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}.$$

Uneori se utilizează această reprezentare chiar dacă $uv = 0$ (deoarece $\bar{a}(u, v)$ este nenul, cel mult unul dintre numerele u și v se poate anula). În acest caz se face convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

Dacă $u = 0$, atunci găsim $x = x_0$ și deci dreapta este paralelă cu Oy *(dreaptă verticală)*. Dacă $v = 0$, atunci $y = y_0$, și dreapta este paralelă cu Ox *(dreaptă orizontală*, figura II.7). În particular: $Oy : x = 0$, $Ox : y = 0$.

Dacă $u \neq 0$, atunci ecuația carteziană a dreptei d(*dreaptă oblică*) se poate scrie în forma

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Numărul $m = \frac{v}{u}$, $u \neq 0$, se numește *panta* sau *coeficientul unghiular* al dreptei d și reprezintă tangenta unghiului $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, determinat de versorul $\bar{i}$ și vectorul director $\frac{1}{u}\bar{a}$ (fig. II.8).

Sensul adjectivelor „vertical", „orizontal" și „oblic" se raportează la reperul cartezian xOy.

Exemplu. Punctul $M_0(1, -1)$ și panta $m = -\frac{1}{2}$ determină dreapta oblică de ecuație $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$. Această dreaptă este aceeași cu cea din exemplul precedent. De ce?

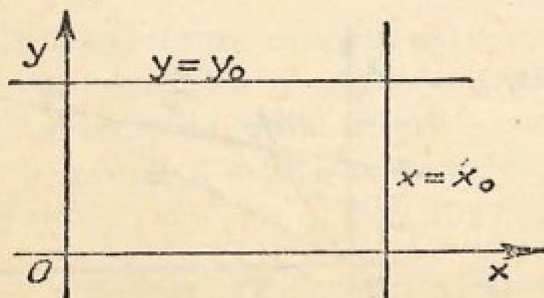


Fig. II.7

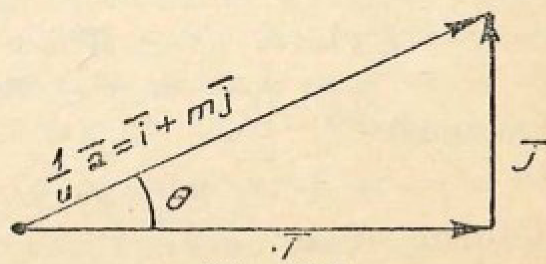


Fig. II.8

1. Să se scrie diversele ecuații ale dreptei d determinată de punctul $M_0(-1, 2)$ și vectorul director $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

Soluție. Ecuația vectorială a dreptei d este $\bar{r} = -\bar{i} + 2\bar{j} + t(2\bar{i} + \bar{j})$, $t \in \mathbf{R}$. Punînd $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$ rezultă ecuațiile parametrice $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$, $t \in \mathbf{R}$. Eliminînd parametrul t găsim ecuația carteziană sub formă de rapoarte $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1}$. Aceasta se mai scrie $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$, punîndu-se în evidență panta $m = \frac{1}{2}$.

2. Să se scrie diversele ecuații ale dreptei d care trece prin punctul $A(2, \sqrt{3})$ și face cu x un unghi de 60°.

Soluție. Panta dreptei d este $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$. Rezultă ecuația carteziană $y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 2)$. Aceasta este echivalentă cu $\frac{y - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{x-2}{1}$. Deoarece partea stîngă depinde numai de y, iar partea dreaptă depinde numai de x rezultă că valoarea comună a rapoartelor este un număr real t, independent de x și de y. Egalînd cu t și explicitînd pe x și y găsim ecuațiile parametrice $x = 2 + t$, $y = \sqrt{3}(1 + t)$, $t \in \mathbf{R}$. Rezultă ecuația vectorială $x\bar{i} + y\bar{j} = 2\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j} + t(\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j})$, $t \in \mathbf{R}$.

3. Ecuațiile mișcării uniforme a unui punct material $M(x, y)$ sînt $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, unde $t \in [0, \infty)$ reprezintă timpul.

1) Care este viteza lui M?

2) Să se găsească distanța parcursă de la momentul $t_1 = 0$ la momentul $t_2 = 10$.

Soluție. Se observă că ecuațiile date reprezintă o semidreaptă din dreapta de vector director $\bar{v} = -2\bar{i} + 2\bar{j}$. Acesta este chiar vectorul viteză.

1) Găsim viteza $\|\bar{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2) Pentru $t_1 = 0$ obținem punctul $M_1(5, -3)$, iar pentru $t_2 = 10$ obținem punctul $M_2(-15, 17)$. Distanța cerută este $d(M_1, M_2) = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} = \|\bar{v}\|(t_2 - t_1)$.

§ 3. Dreapta determinată de două puncte distincte

Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ determină o (singură) dreaptă d. Pentru a scrie ecuația carteziană a acestei drepte vom considera că ea este determinată de punctul M_1 și de vectorul director $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}$ (fig. II.9). Astfel

$$d : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

cu convenția făcută în §2 referitoare la anularea numitorilor.

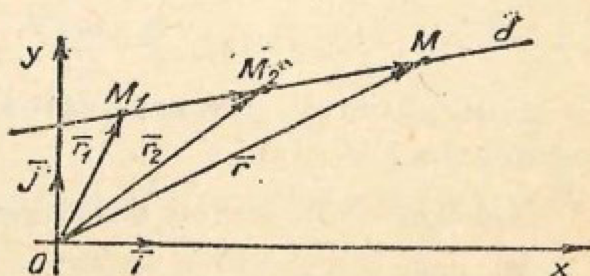


Fig. II.9

Utilizînd determinanţii ecuaţia precedentă se mai scrie în formele echivalente

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oricare dintre aceste ecuaţii în $\mathbf{R}^2$ conduce la condiţia ca trei puncte date $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, să fie coliniare:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Următoarele afirmaţii sînt imediate şi stabilesc legătura între modalităţile de determinare a dreptei prin două puncte şi printr-un punct şi o direcţie.

Dacă $x_2 - x_1 \neq 0$, atunci dreapta M_1M_2 are coeficientul unghiular

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \theta, \qquad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Punînd

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t, \qquad t \in \mathbf{R},$$

rezultă că ecuaţiile parametrice ale dreptei determinată de $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ sînt

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

De aici se observă imediat că segmentul $[M_1, M_2]$ este caracterizat prin

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

sau altfel scris

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_1 + tx_2, \\ y = (1 - t)y_1 + ty_2, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Pentru $t = 0$ obţinem punctul M_1, pentru $t = 1$ găsim punctul M_2, iar pentru $t = \frac{1}{2}$ se găseşte *mijlocul segmentului* $[M_1M_2]$, adică punctul de coordonate

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Evident punctele corespunzătoare lui $t \in (0, 1)$ sînt *puncte interioare* pentru segmentul $[M_1M_2]$.

Aplicaţii. 1) *Împărţirea unui segment orientat nenul într-un raport dat.*

Se spune că punctul M împarte segmentul orientat nenul $\overrightarrow{M_1M_2}$ în raportul $k \in \mathbf{R} - \{-1\}$ dacă satisface condiţia $\overline{M_1M} = k\overline{MM_2}$. Deoarece $\overline{M_1M} = (x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j}$,

$\overline{MM_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$, condiția de definiție este echivalentă cu $x - x_1 = k(x_2 - x)$, $y - y_1 = k(y_2 - y)$ și deci coordonatele punctului M sînt

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, \quad k \neq -1, \quad k = \text{fixat}.$$

Pentru $k = 0$, obținem punctul M_1, iar pentru $k = 1$ obținem mijlocul segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$. Pentru $k > 0$, punctul M este interior segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$, iar pentru $k < 0$, punctul M este exterior segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Observație. Ecuațiile $x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$, $y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$, $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ reprezintă dreapta M_1M_2 ca și $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$, $t \in \mathbb{R}$. Legătura dintre parametrul t și parametrul k este $t = \frac{k}{1 + k}$.

2) *Centru de greutate*. Fie punctele distincte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ avînd vectorii de poziție $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \ldots, \overline{OM_n}$ și numerele reale $m_1, m_2, \ldots, m_n$ cu proprietatea $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$. Punctul G definit prin

$$\overline{OG} = \frac{m_1\overline{OM_1} + m_2\overline{OM_2} + \ldots + m_n\overline{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

se numește *centrul de greutate al sistemului de puncte* $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ *relativ la sistemul de ponderi* $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Dacă $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și $G(x, y)$, atunci

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Dacă $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$, atunci sistemul de puncte se zice *omogen*. În acest caz centrul de greutate are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

În particular, pentru $n = 2$ obținem mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, iar pentru $n = 3$ obținem coordonatele centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctele $A\left(-\frac{4}{5}, 2\right)$, $B\left(\frac{2}{5}, 4\right)$, $C(1, 5)$, $D\left(-\frac{7}{5}, 1\right)$. Să se găsească ecuațiile dreptelor distincte determinate de aceste puncte.

Soluție. Dreapta AB are ecuația $\dfrac{x + \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \dfrac{y - 2}{4 - 2}$, adică $\dfrac{x + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{y - 2}{2}$.

Deoarece $\dfrac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{5 - 2}{2}$, punctul C se află pe dreapta AB, adică punctele A, B, C sînt coliniare.

analog,

$$\frac{-\frac{7}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{1-2}{2}$$

arată că punctele A, B, D sînt coliniare.

2. Se dau punctele $A(-1, 0)$, $B(1, -2)$. Să se determine:

1) coordonatele simetricului lui A față de B,

2) coordonatele punctului M care împarte segmentul $\overrightarrow{AB}$ în raportul π.

Soluție. 1) Fie (x, y) coordonatele simetricului lui A față de B. Egalitățile $\frac{-1+x}{2}=1$, $\frac{0+y}{2}=-2$ conduc la $x=3$, $y=-4$.

2) Preferăm înlocuirea directă în formule. Rezultă

$$x=\frac{-1+\pi}{1+\pi} \quad y=\frac{-2\pi}{1+\pi}.$$

3. Să se verifice că mijlocul segmentului care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater de vîrfuri $M_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3, 4$, este centrul de greutate al sistemului omogen de puncte (M_1, M_2, M_3, M_4).

Soluție (fig. II.10). Coordonatele mijlocului A al segmentului $[M_4M_2]$ sînt $x_A=\frac{x_4+x_2}{2}$, $y_A=\frac{y_1+y_2}{2}$, iar coordonatele mijlocului B al segmentului $[M_1M_3]$ sînt $x_B=\frac{x_1+x_3}{2}$, $y_B=\frac{y_1+y_3}{2}$. Mijlocul G al segmentului $[AB]$ are coordonatele $x_G=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$, $y_G=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$, adică G este centrul de greutate specificat în problemă.

§ 4. Ecuația carteziană generală a unei drepte

Fie un punct $M_0(x_0, y_0)$ avînd vectorul de poziție $\bar{r}_0(x_0, y_0)$ și fie $\bar{n}(a, b)$ un vector nenul. Există o singură dreaptă d ce trece prin M_0 și este perpendiculară pe $\bar{n}$ (fig. II. 11).

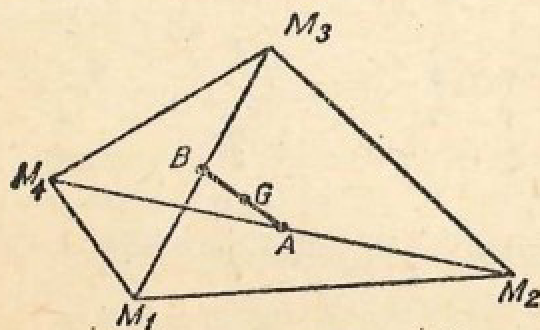


Fig. II.10

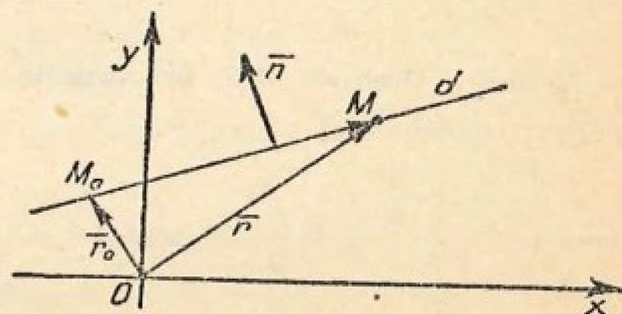


Fig. II.11

Teoremă. *Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar și $\bar{r}(x, y)$ vectorul său de poziție. Punctul M aparține dreptei d, determinată de M_0 și de $\bar{n} \neq \bar{0}$, dacă și numai dacă*

$$\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0.$$

Demonstrație. Punctul M aparține lui d dacă și numai dacă vectorii $\bar{n}$ și $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ sînt ortogonali. Pe de altă parte ortogonalitatea este echivalentă cu anularea produsului scalar.

Deoarece $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j}$, $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}$, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$ ecuația $\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$ în V este echivalentă cu ecuația

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

în $\mathbf{R}^2$, aceasta din urmă numindu-se *ecuația carteziană a unei drepte ce trece prin M_0 și este perpendiculară pe vectorul nenul $\bar{n}$*. Vectorul nenul $\bar{n}$ se numește *vectorul normal* al dreptei d. Precizăm că orice vector $t\bar{n}$, $t \neq 0$, joacă același rol cu $\bar{n}$.

Teoremă. *Fie $\bar{a}\ (u, v)$ și $\bar{n}\ (a, b)$ doi vectori nenuli. Ecuațiile*

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a},\ t \in \mathbf{R} \text{ în } V, \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt,\ t \in \mathbf{R} \end{cases} \text{în } \mathbf{R}^2;$$

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} \text{ în } \mathbf{R}^2;\ \bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0 \text{ în } V;\ a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \text{ în } \mathbf{R}^2$$

sînt echivalente cu ecuația

$$ax + by + c = 0,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Demonstrație. Raționamentul direct îl lăsăm drept temă.

Reciproc, este suficient să arătăm că ecuația $ax + by + c = 0$ reprezintă o dreaptă. Într-adevăr, dacă (x_0, y_0) este o soluție a acestei ecuații, atunci găsim $c = -ax_0 - by_0$ și ecuația se scrie în forma echivalentă

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

care reprezintă o dreaptă ce trece prin $M_0(x_0, y_0)$ și este perpendiculară pe $\bar{n}(a, b)$.

Ecuația $ax + by + c = 0$ în $\mathbf{R}^2$, pentru care $a^2 + b^2 \neq 0$, se numește *ecuația carteziană generală a unei drepte*. Deoarece $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$ este un polinom de gradul întîi în x și y, uneori se spune că dreptele sînt *curbe algebrice de ordinul unu*.

Deci

$$d = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0\}$$

sau mai scurt

$$d : ax + by + c = 0.$$

Vectorul normal al unei drepte date prin ecuația carteziană generală este $\bar{n}(a, b)$, iar *vectorul director* al aceleiași drepte este $(b, -a)$. În cazul $b \neq 0$,

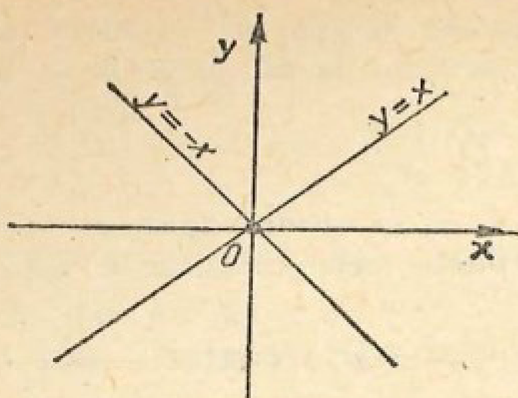


Fig. II.12

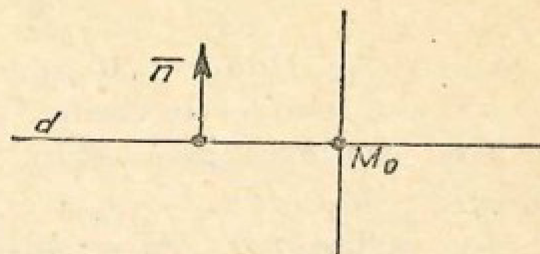


Fig. II.13

coeficientul unghiular este $m = -\frac{a}{b}$ şi ecuaţia dreptei corespunzătoare se poate scrie în *forma carteziană explicită*

$$y = mx + n.$$

Ecuaţia generală a unei drepte ce trece prin origine este

$$ax + by = 0.$$

Dacă $b \neq 0$, atunci putem scrie $y = mx$, $m = -\frac{a}{b}$. În particular, pentru $m = 1$ obţinem $y = x$ care este ecuaţia *primei bisectoare a unghiului axelor de coordonate*, iar pentru $m = -1$ obţinem $y = -x$ care este ecuaţia celei de *a doua bisectoare a unghiului axelor de coordonate* (fig. II.12).

Fie dreapta $d : ax + by + c = 0$. Dreapta care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0) \in d$ şi are vectorul director $\bar{n}(a, b)$ se numeşte *normala* lui d în punctul M_0 (fig. II.13).

Comentarii. 1) Fie dreapta $d : ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se află pe dreapta d dacă şi numai dacă $ax_0 + by_0 + c = 0$.

2) Considerăm dreapta d: $2x + 3y + 1 = 0$. Punînd $x = 1$ găsim $y = -1$, adică d trece prin punctul de coordonate $(1, -1)$. Analog constatăm că d conţine punctul $(-5, 3)$. Rezultă că ecuaţia lui d este echivalentă cu $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2}$. De aici se obţin ecuaţiile parametrice $x = 1 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Pentru fiecare $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ dreptele de ecuaţii $ax + by + c = 0$ şi $t(ax + by + c) = 0$ sînt egale. Într-adevăr, prima are vectorul normal $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j}$, iar a doua vectorul normal $t\bar{n}$, $t \neq 0$. De asemenea un punct (x_0, y_0) se află pe prima dacă şi numai dacă se află pe a doua, condiţia comună fiind $ax_0 + by_0 + c = 0$. În concluzie ecuaţiile $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ reprezintă aceeaşi dreaptă dacă şi numai dacă au coeficienţii corespondenţi proporţionali.

Pentru $t = 0$ ecuaţia $t(ax + by + c) = 0$ reprezintă planul p.

4) Fie dreapta $d : ax + by + c = 0$. Pentru trasarea lui d în raport cu reperul cartezian este necesar să determinăm fie două puncte distincte pe d, fie un punct şi vectorul normal, fie un punct şi vectorul director, fie un punct şi panta.

PROBLEME REZOLVATE

1. Ştiind că $M_0(3, 4)$ este piciorul perpendicularei coborîtă din origine pe dreapta d, să se scrie ecuaţia dreptei d. Apoi să se determine un versor director al lui d şi panta lui d.

Soluţie. Dreapta d este determinată de punctul $M_0(3, 4)$ şi vectorul normal $\overline{OM} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$. De aceea ecuaţia carteziană implicită a lui d este $3(x - 3) + 4(y - 4) = 0$ adică $3x + 4y - 25 = 0$.

Un vector director al lui d este $\bar{a} = -4\bar{i} + 3\bar{j}$, iar acestuia i se asociază versorul $\frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a} = \frac{1}{5}(-4\bar{i} + 3\bar{j})$.

Explicitînd $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ găsim panta $m = -\frac{3}{4}$.

2. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei d' ce trece prin punctul $M_0(1, 2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d : 3x - 2y + 2 = 0$. Să se găsească proiecţia lui M_0 pe d şi simetricul lui M_0 faţă de d.

Soluţie. Vectorul normal al lui d este $\bar{n} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$. Acesta trebuie să fie vectorul director al lui d'. Deci d': $x = 1 + 3t$, $y = 2 - 2t$, $t \in \mathbf{R}$.

Proiecţia lui M_0 pe d este dată de $d' \cap d$, adică este caracterizată prin sistemul

$$3x - 2y + 2 = 0, \quad x = 1 + 3t, \quad y = 2 - 2t.$$

Rezultă $13t + 1 = 0$, adică $t = -\frac{1}{13}$, şi deci $\left(\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$ sînt coordonatele punctului căutat. Dacă (a, b) sînt coordonatele simetricului lui M_0 faţă de d, atunci

$$\frac{1 + a}{2} = \frac{10}{13}, \quad \frac{1 + b}{2} = \frac{24}{13}.$$

Deci $a = \frac{7}{13}$, $b = \frac{35}{13}$.

3. Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 4|$. Apoi să se determine numărul soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} y = |x - 4|, & x \in [-1, 6] \\ y = t, & t \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

în funcţie de valorile lui t.

Soluţie. Deoarece

$$f(x) = |x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{pentru } x \geqslant 4 \\ -x + 4 & \text{pentru } x < 4 \end{cases},$$

graficul lui f este reuniunea semidreptelor

$$y = x - 4,\ x \geqslant 4; \quad y = -x + 4,\ x < 4$$

(fig. II.14).

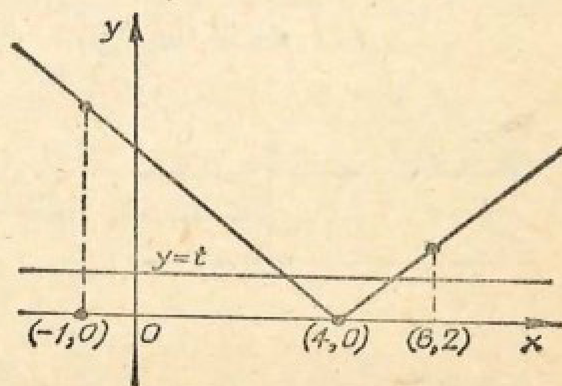


Fig. II.14

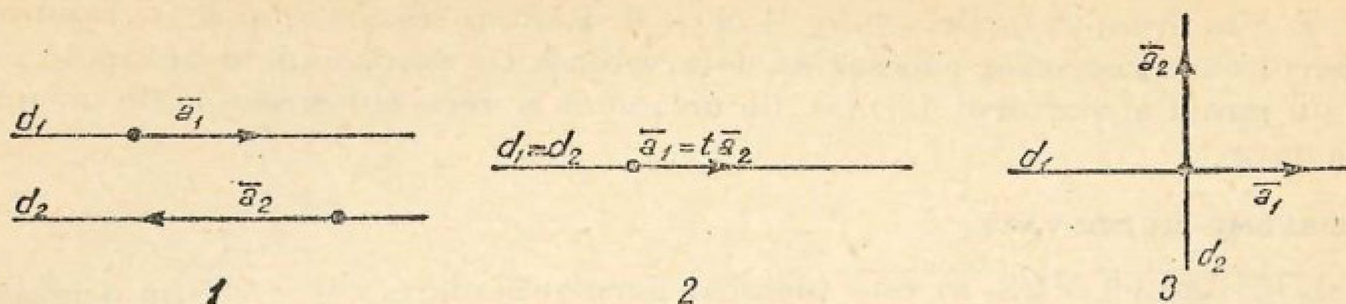


Fig. II.15

Urmărind figura II.14 deducem: pentru $t \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ sistemul nu admite soluţii, pentru $t = 0$ se obţine soluţia (4, 0), pentru $t \in (0, 2]$ sistemul admite două soluţii, pentru $t \in (2, 5]$ sistemul admite o soluţie.

§ 5. Reuniunea şi intersecţia a două drepte

Mai întîi ne vom referi la poziţiile relative a două drepte din plan.

Fie d_1 şi d_2 două drepte care au respectiv vectorii directori $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$. Dreptele d_1 şi d_2 sînt (1) *paralele* dacă şi numai dacă n-au nici un punct comun ($\Rightarrow \bar{a}_1$ este coliniar cu $\bar{a}_2$; figura II.15.1), (2) *egale* dacă şi numai dacă au un punct comun, iar $\bar{a}_1$ este coliniar cu $\bar{a}_2$ (fig. II.15.2), (3) *secante* dacă şi numai dacă $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ sînt necoliniari; dreptele secante sînt *perpendiculare* dacă şi numai dacă $\bar{a}_1 \perp \bar{a}_2$, adică $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0$ (fig. II.15.3).

În particular fie două drepte de coeficienţi unghiulari m_1 şi m_2. Condiţia de paralelism este $m_1 = m_2$, iar condiţia de perpendicularitate este $m_1 m_2 = -1$.

Fie $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi d_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Dreptele d_1 şi d_2 sînt (1) *paralele* dacă şi numai dacă vectorii normali $\bar{n}_1(a_1, b_1)$ şi $\bar{n}_2(a_2, b_2)$ sînt coliniari (fig. II.16.1). adică $\bar{n}_1 = t\bar{n}_2$ sau $(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$, şi $c_1 \neq tc_2$, (2) *egale* dacă şi numai dacă $(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$ şi $c_1 = tc_2$ (fig. II.16.2), (3) *secante* dacă şi numai dacă $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ sînt necoliniari; dreptele secante sînt *perpendiculare* dacă şi numai dacă $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$, adică $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (fig. II.16.3).

T e o r e m ă. *Dacă* $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci

$$d_1 \cup d_2 : (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

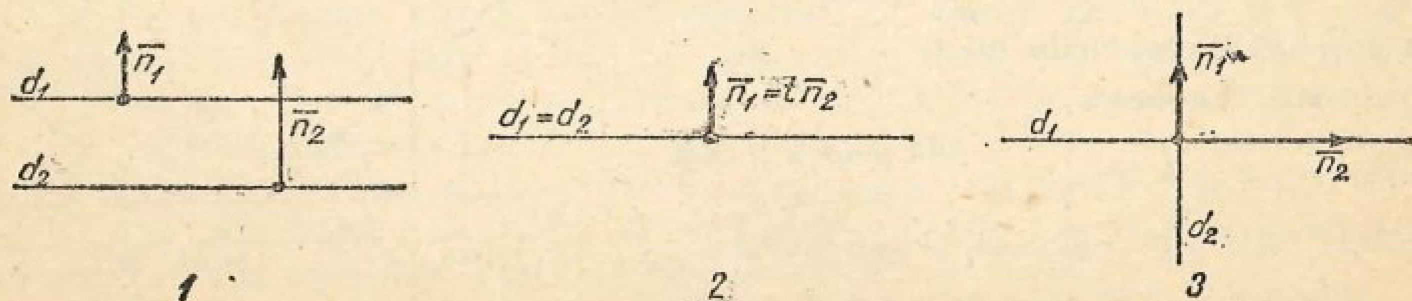


Fig. II.16

Demonstrație. Fie $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0\}$. Trebuie să arătăm că $d_1 \cup d_2 = \Gamma$, adică $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ și $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

Incluziunea $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ decurge din următorul șir de implicații: $(x_0, y_0) \in \in d_1 \cup d_2 \Rightarrow$ sau $(x_0, y_0) \in d_1$ sau $(x_0, y_0) \in d_2$ sau $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ sau $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \Rightarrow (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0 \Rightarrow \Rightarrow (x_0, y_0) \in \Gamma$.

Invers: dacă $(x_0, y_0) \in \Gamma$, atunci $(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0$ și deci cel puțin un factor este zero, să zicem $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$; rezultă $(x_0, y_0) \in d_1 \subseteq d_1 \cup d_2$ și deci $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

T e o r e m ă. *Dacă* $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, *atunci* $d_1 \cap d_2 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Mai mult,

1) $d_1 \cap d_2 = \{M_0\} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$,

2) $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0,\ c_2b_1 - c_1b_2 = 0$,

3) $d_1 \cap d_2 = \emptyset \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0,\ c_2b_1 - c_1b_2 \neq 0$.

Demonstrație. Dovedim numai relația 1), restul rămînînd drept temă.

Dacă $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, atunci sistemul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

are soluția unică

$$x_0 = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y_0 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

și deci $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$. Reciproc ipoteza $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ implică falsitatea relațiilor $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ și $c_2b_1 - c_1b_2 = 0$; $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ și $c_2b_1 - c_1b_2 \neq 0$ deoarece $\{M_0\}$ nu este o dreaptă (de ce?) și nici mulțimea vidă. Deci $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ implică $a_1b_2 - b_2a_1 \neq 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră mulțimea de puncte $M(x, y)$ ale căror coordonate verifică ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$. Să se arate că această mulțime este reuniunea a două drepte perpendiculare, care trec prin origine.

Soluție. Fie Γ: $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în $\mathbf{R}^2$ este echivalentă cu ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în $\mathbf{R}$, cu parametrul $y \in \mathbf{R}$.

Rezultă $12x^2 - 7yx - 12y^2 = 0 \Leftrightarrow 12\left(x - \frac{4y}{3}\right)\left(x + \frac{3y}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow (3x - 4y)(4x + 3y) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$ sau $4x + 3y = 0$. Deci $\Gamma = d_1 \cup d_2$ unde $d_1 : 3x - 4y = 0$ și $d_2 : 4x + 3y = 0$. Deoarece $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$, condiția de perpendicularitate $m_1m_2 = -1$ se verifică imediat.

Comentarii

1) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, cu $abc \neq 0$ și $b^2 - 4ac \geqslant 0$, reprezintă două drepte în plan care trec prin origine și diferite de axele Ox, Oy.

2) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, cu $abc \neq 0$ și $b^2 - 4ac < 0$, reprezintă un punct în plan și anume originea $O(0, 0)$.

3) O ecuație de forma $ax^2 + bxy = 0$, cu $ab \neq 0$, reprezintă două drepte: axa Oy de ecuație $x = 0$ și dreapta de ecuație $ax + by = 0$.

4) O ecuație de forma $bxy + cy^2 = 0$ cu $bc \neq 0$ reprezintă două drepte: axa Ox de ecuație $y = 0$ și dreapta de ecuație $bx + cy = 0$.

2. Să se găsească coordonatele punctului de intersecție al dreptelor:

$$d : (a + 1)x + ay = a,$$

$$d' : (a + 6)x + 2(a + 2)y = 2a + 1, \ a \in \mathbb{R},$$

utilizînd metoda matriceală.

Soluție. Considerînd matricele

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & a \\ a+6 & 2(a+2) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ 2a+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{sistemul liniar} \begin{cases} (a + 1)x + ay = a \\ (a + 6)x + 2(a + 2)y = 2a + 1 \end{cases}$$

se scrie astfel $AX = B$. Deoarece

$$\det A = \begin{vmatrix} a+1 & a \\ a+6 & 2(a+2) \end{vmatrix} = a^2 + 4 \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

matricea A admite inversă și

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 2(a+2) & -a \\ -(a+6) & a+1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$, adică

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+4} \begin{bmatrix} 2(a+2) & -a \\ -(a+6) & a+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 2a+1 \end{bmatrix}.$$

Efectuînd calculele obținem

$$x = \frac{1}{a^2 + 4} \cdot [2(a + 2)a - a(2a + 1)] = \frac{3a}{a^2 + 4},$$

$$y = \frac{1}{a^2 + 4} [-(a + 6)a + (a + 1)(2a + 1)] = \frac{a^2 - 3a + 1}{a^2 + 4}.$$

3. Fie A și B punctele în care dreapta de ecuație $ax + (2a + 1)y + a^2 = 0$ taie axele de coordonate.

1) Să se scrie ecuația dreptei d_1 ce trece prin A și este paralelă cu prima bisectoare a axelor.

2) Să se scrie ecuația dreptei d_2 care trece prin B și este perpendiculară pe d_1.

3) Să se determine a astfel încît punctul de intersecție dintre d_1 și d_2 să fie pe dreapta de ecuație $x + 5y = 1$.

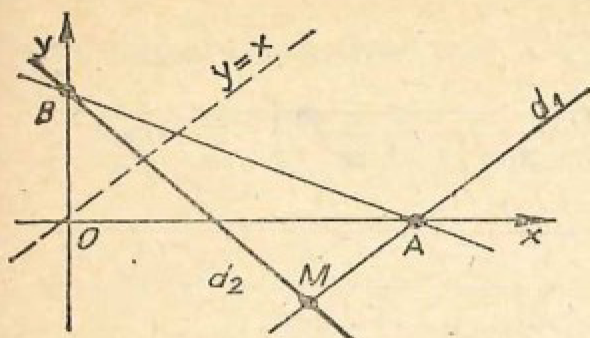


Fig. II.17

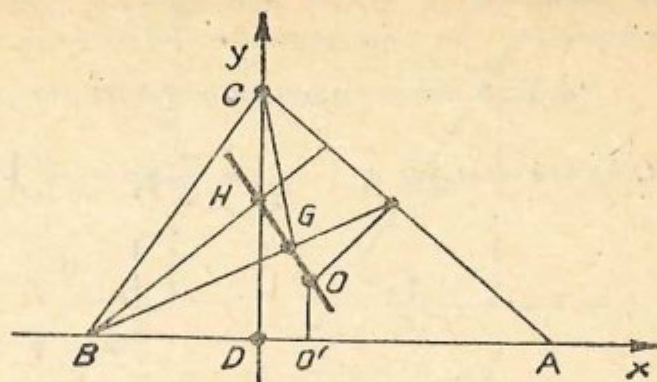


Fig. II.18

Soluție. Pentru $y = 0$, $a \neq 0$, găsim $x = -a$ și deci $A(-a, 0)$. Făcînd $x = 0$, $a \neq -\frac{1}{2}$ obținem $y = -\frac{a^2}{2a+1}$ și astfel $B\left(0, \frac{-a^2}{2a+1}\right)$. Dacă $a < -\frac{1}{2}$, atunci putem construi figura II.17.

1) Coeficientul unghiular al lui d_1 este $m_1 = 1$. Astfel d_1 are ecuația $y = x + a$.

2) Coeficientul unghiular al lui d_2 este $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -1$. De aceea d_2 are ecuația $x + y + \frac{a^2}{2a+1} = 0$.

3) Condiția ca M să fie pe dreapta dată este echivalentă cu condiția de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} x - y = -a \\ x + y = -\dfrac{a^2}{2a+1} \\ x + 5y = 1 \end{cases}$$

adică cu

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ 1 & 1 & -\dfrac{a^2}{2a+1} \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd acest determinant găsim $2(2a + 1) + 5(-a^2 - a) + 3a^2 + a = 0$ sau $a^2 = 1$ adică $a = \pm 1$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că ortocentrul H, centrul de greutate G și centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC sînt coliniare.

Soluție. Se iau drept axe de coordonate latura BA și înălțimea DC. Se notează cu a și b abscisele punctelor A respectiv B și cu c ordonata lui C (fig. II.18).

Înălțimea CD are ecuația $x = 0$. Deoarece coeficientul unghiular al dreptei AC este $-\frac{c}{a}$, se găsește că ecuația înălțimii din B este $ax - by - ab = 0$. Rezultă $H\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$.

Coordonatele mijloacelor segmentelor $[CA]$ și $[AB]$ sînt $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$ respectiv $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$. De aceea mediana din B are ecuația $cx - (a - 2b)y - bc = 0$, iar mediana din C are ecuația $2cx + (a + b)y - c(a + b) = 0$. Rezultă $G\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$. De altfel acest lucru

se putea obține direct, deoarece coordonatele centrului de greutate sînt respectiv medii aritmetice ale coordonatelor vîrfurilor triunghiului.

Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuația $x = \frac{a+b}{2}$, iar mediatoarea segmentului $[CA]$ are ecuația $y - \frac{c}{2} = \frac{a}{c}\left(x - \frac{a}{2}\right)$. De aceea $O\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c^2+ab}{2c}\right)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{a+b}{3} & \frac{c}{3} & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{c^2+ab}{2c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

punctele H, G și O sînt coliniare. Acest lucru poate fi dovedit și arătînd că $\overline{HG} = 2\overline{GO}$.

Notă. Conținutul problemei precedente este independent de fixarea unui reper cartezian în plan. De aceea se preferă reperul cartezian care simplifică calculele.

§ 6. Fascicul de drepte

Presupunem că avem două drepte $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ care nu sînt paralele sau egale. Intersecția $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ este caracterizată prin sistemul liniar

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \end{cases}$$

Reciproc, dacă se dă un punct $M_0(x_0, y_0)$, atunci el poate fi gîndit ca intersecția dreptelor de ecuații $x = x_0$ și $y = y_0$. Este încă evident că prin M_0 trec o infinitate de drepte.

D e f i n i ț i e. Mulțimea tuturor dreptelor din plan care trec printr-un punct dat M_0 se numește fascicul de drepte. Punctul M_0 se numește vîrful fasciculului (fig. II.19).

T e o r e m ă. *Dacă punctul M_0 este determinat ca intersecția dreptelor d_1 și d_2, atunci ecuația unei drepte oarecare din fasciculul de vîrf M_0 este*

$$r(a_1x + b_1y + c_1) + s(a_2x + b_2y + c_2) = 0,\ r^2 + s^2 \neq 0\ (r, s) \in \mathbf{R}^2.$$

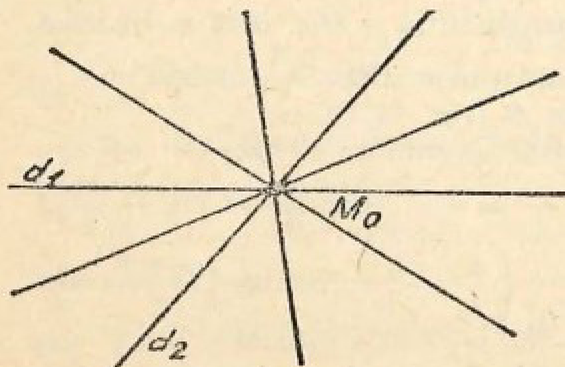


Fig. II.19.

Demonstrație. Deoarece vectorii normali $\bar{n}_1(a_1, b_1)$ și $\bar{n}_2(a_2, b_2)$ sînt prin ipoteză necoliniari, adică formează o bază, orice vector nenul $\bar{n}$ din plan se scrie în forma $\bar{n} = r\bar{n}_1 + s\bar{n}_2$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Ecuația dreptei care trece prin M_0 și are vectorul normal $\bar{n}$ este cea scrisă în teoremă.

Ecuația din teorema precedentă se numește *ecuația fasciculului de vîrf* M_0.

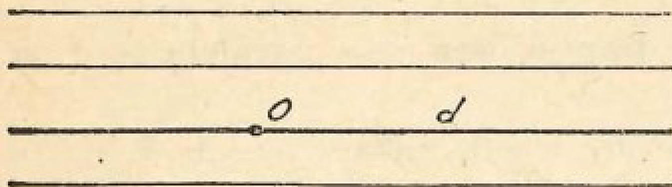


Fig. II. 20

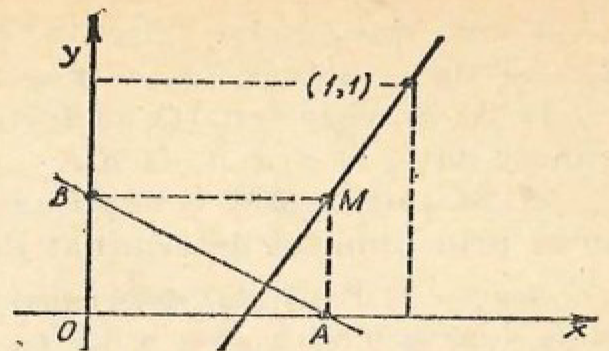


Fig. II. 21

Numerele reale r şi s sînt parametri, cel puţin unul fiind nenul. De aceea în aplicaţii se lucrează fie cu $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $t(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$, fie cu $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ şi $a_1x + b_1y + c_1 + t(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, $t \in \mathbf{R}$.

Fie $d : ax + by = 0$ o dreaptă care trece prin origine. Mulţimea tuturor dreptelor paralele sau egale cu d se numeşte *fascicul de drepte paralele*. Dreapta d se numeşte *linia de reper a fasciculului* (fig. II. 20). Evident o dreaptă oarecare din fasciculul de drepte paralele cu linia de reper d are ecuaţia

$$ax + by + r = 0,$$

unde r este un parametru real. Această ecuaţie se mai numeşte şi *ecuaţia fasciculului de drepte paralele*.

O b s e r v a ţ i e. Reuniunea dreptelor dintr-un fascicul este planul p.

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian se dau punctele $A(r, 0)$, $B(0, s)$ şi $M(r, s)$. Să se scrie ecuaţia carteziană a perpendicularei din M pe AB. Să se arate că dacă A şi B sînt variabile astfel încît $r + s = 1$, atunci această perpendiculară trece printr-un punct fix.

Soluţie. Fie h dreapta ce trece prin M şi este perpendiculară pe AB (fig. II. 21). Vectorul director al dreptei AB, adică $-r\bar{i} + s\bar{j}$, este vector normal pentru h. De aceea ecuaţia carteziană implicită a lui h este $-r(x - r) + s(y - s) = 0$, adică $rx - sy + s^2 - r^2 = 0$.

Pentru r, s variabile, condiţia $r + s = 1$ implică $r(x + y - 2) + 1 - y = 0$, $\forall r \in \mathbf{R}$, adică h face parte din fasciculul de drepte al cărui vîrf este soluţia sistemului $x + y - 2 = 0$, $1 - y = 0$, adică $(1,1)$.

2. Se dau dreptele AB: $x - 2y + 3 = 0$, AC: $2x - y - 3 = 0$, BC: $3x + 2y + 1 = 0$. Să se scrie ecuaţia carteziană a înălţimii din A a triunghiului ABC.

Soluţie. Dreptele AB şi AC determină fasciculul de ecuaţie $r(x - 2y + 3) + s(2x - y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Aceasta se transcrie sub forma $x(r + 2s) + y(-2r - s) + 3(r - s) = 0$. Selectăm dreapta din fascicul perpendiculară pe BC, adică punem condiţia $3(r + 2s) + 2(-2r - s) = 0$. Rezultă $r = 4s$. Aceasta împreună cu ipoteza $s \neq 0$ conduce la ecuaţia $2x - 3y + 3 = 0$.

3. Se dau patru drepte $d_1: 2x + y - 1 = 0$, $d_1': x - 2y + 3 = 0$, $d_2: x + 3y - 2 = 0$, $d_2': -x + 2y + 3 = 0$.

1) Să se scrie ecuația carteziană a dreptei care trece prin punctele determinate de $d_1 \cap d_1'$ și $d_2 \cap d_2'$.

2) Să se găsească ecuația carteziană a dreptei care este paralelă cu d_1 și trece prin punctul determinat de $d_2 \cap d_2'$.

Soluție. 1) Fasciculul determinat de d_1 și d_1' are ecuația $r_1(2x + y - 1) + s_1(x - 2y + 3) = 0$, $r_1^2 + s_1^2 \neq 0$, iar fasciculul determinat de d_2 și d_2' are ecuația $r_2(x + 3y - 2) + s_2(-x + 2y + 3) = 0$, $r_2^2 + s_2^2 \neq 0$. Cele două ecuații reprezintă aceeași dreaptă dacă și numai dacă

$$\frac{2r_1 + s_1}{r_2 - s_2} = \frac{r_1 - 2s_1}{3r_2 + 2s_2} = \frac{-r_1 + 3s_1}{-2r_2 + 3s_2}.$$

Utilizînd soluțiile acestui sistem rezultă dreapta de ecuație $4x + 7y - 9 = 0$.

2) Fasciculul de drepte paralele cu d_1 are ecuația $2x + y - t = 0$. Se impune condiția

$$\frac{2}{r_2 - s_2} = \frac{1}{3r_2 + 2s_2} = \frac{-t}{-2r_2 + 3s_2}.$$

Rezultă $t = 5$ și deci $2x + y - 5 = 0$.

§ 7. Dreapta orientată

Fie d o dreaptă din plan. Pe dreapta d se pot stabili două și numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor dreptei) pe care convenim să le notăm cu (—), (+) și pe care le reprezentăm prin săgeți.

Definiție. O dreaptă d împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește dreaptă orientată.

Dacă $\bar{a}$ este vectorul director al lui d, atunci este natural să-i atașăm lui d sensul lui $\bar{a}$ și să notăm acest sens cu (+). Acest lucru va fi admis în continuare (fig. II.22).

Fie $d = \{M \mid \overline{M_0M} = t\bar{a},\ t \in \mathbf{R}\}$ o dreaptă orientată prin $\bar{a}$. Ordinea punctelor lui d, indicată de sensul vectorului director $\bar{a}$, este coerentă cu ordinea pe $\mathbf{R}$. Mulțimea $d_1 = \{M \mid \overline{M_0M} = t\bar{a},\ t \geqslant 0\}$ se numește *partea pozitivă* a lui d, iar mulțimea $d_2 = \{M \mid \overline{M_0M} = t\bar{a},\ t \leqslant 0\}$ se numește *partea negativă* a lui d. Partea pozitivă și partea negativă sînt semidrepte ale lui d determinate de punctul M_0.

Axele de coordonate Ox și Oy sînt exemple de drepte orientate, iar originea le împarte în *semiaxe* pozitive și negative.

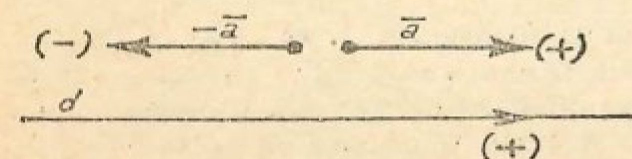


Fig. II. 22

Orice dreaptă orientată

$$d = \{M \mid \overline{M_0M} = t\bar{a},\ t \in \mathbf{R}\}$$

poate fi scrisă în forma

$$d = \left\{M \mid \overline{M_0M} = s\bar{e},\ s \in \mathbf{R},\ \bar{e} = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a}\right\}.$$

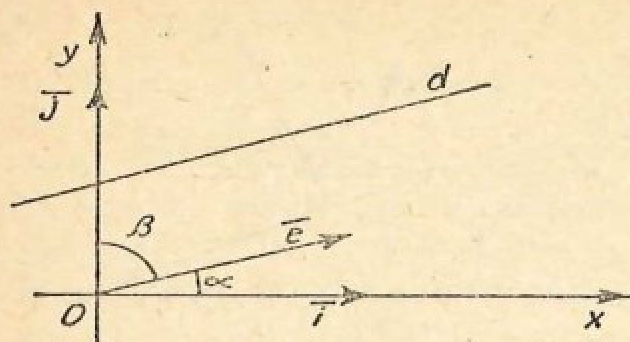


Fig. II. 23

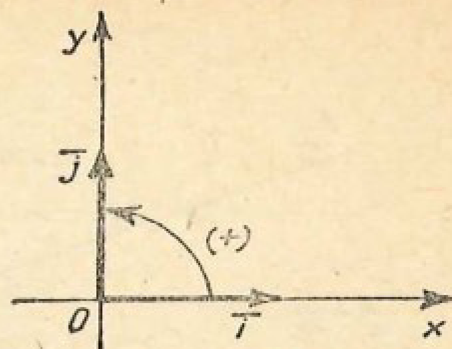


Fig. II. 24

Unghiurile α și β dintre *versorul director* $\bar{e}$ și versorii $\bar{i}$ respectiv $\bar{j}$ se numesc *unghiurile directoare* ale dreptei orientate d (fig. II. 23). Fie u, v coordonatele lui $\bar{a}$. Coordonatele versorului $\bar{e}$,

$$\cos\alpha = \bar{e}\cdot\bar{i} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\ \cos\beta = \bar{e}\cdot\bar{j} = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

se numesc *cosinusurile directoare* ale dreptei orientate d. Ele satisfac relația

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

În cele precedente am arătat ce se înțelege prin orientarea unei drepte privită ca spațiu cu o dimensiune de-sine-stătător, adică din punctul de vedere al unui „observator" situat în această dreaptă. Dar în unele probleme este necesar să privim dreapta din punctul de vedere al unui „observator" din planul orientat. Elementul de bază în studiul dreptei în raport cu planul este normala dreptei.

În plan se pot stabili două și numai două sensuri de rotație: sensul trigonometric (+) și sensul mișcării acelor de ceasornic (—). Planul împreună cu un sens de rotație fixat se numește *plan orientat* (fig. II.24).

Teoremă. *În planul orientat, alegerea unui sens de parcurs pe o dreaptă este echivalentă cu alegerea unui sens pe normală.*

Demonstrație. Prin convenție sensul rotației directe în plan este sensul trigonometric.

Fie dreapta d: $ax + by + c = 0$ orientată cu ajutorul vectorului director $(b, -a)$. Rotind în sens direct cu un unghi de măsură $\pi/2$ (vezi Cap. 3), din vectorul $(b, -a)$ găsim vectorul $\bar{n}(a, b)$ care determină o orientare pe normala dreptei d. Raționamentul reciproc este evident (fig. II.25).

Avînd în vedere teorema precedentă, în planul orientat se admite definiția: *o dreaptă d împreună cu o alegere a sensului pe normală se numește* **dreaptă orientată.**

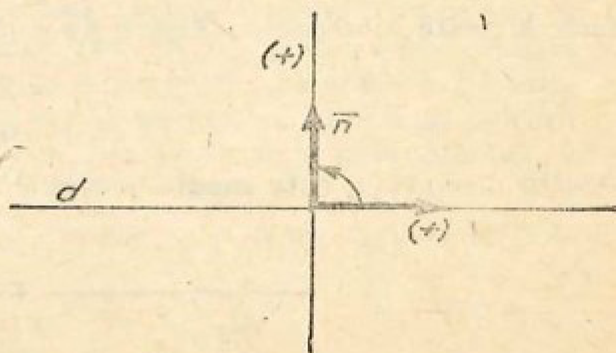


Fig. II. 25

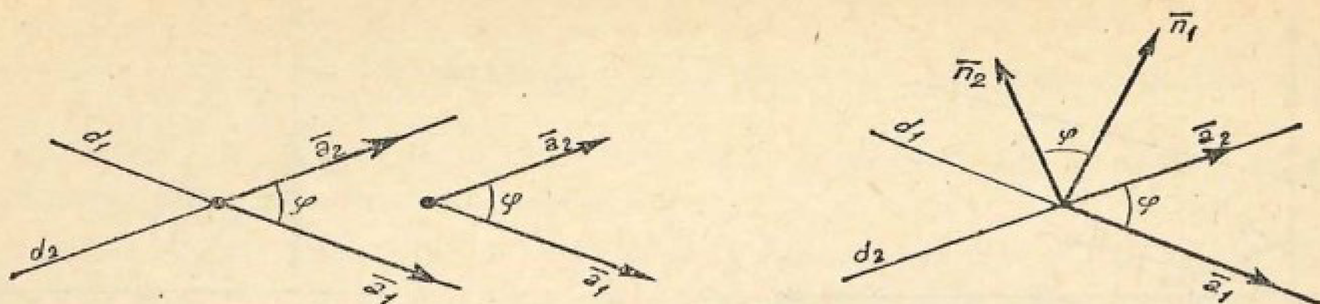


Fig. II. 26

Presupunem că d_1 şi d_2 sînt drepte orientate prin vectorii directori $\bar{a}_1(u_1, v_1)$ şi $\bar{a}_2(u_2, v_2)$. Prin unghiul dintre dreptele orientate d_1 şi d_2 vom înţelege unghiul dintre $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$, adică unghiul definit prin (fig. II.26)

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{\|\bar{a}_1\| \|\bar{a}_2\|} = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \sqrt{u_2^2 + v_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Presupunem că d_1 şi d_2 sînt drepte orientate prin vectorii normali $\bar{n}_1(a_1, b_1)$ şi $\bar{n}_2(\bar{a}_2, b_2)$. În acest caz unghiul dintre dreptele orientate d_1 şi d_2 este unghiul dintre vectorii $\bar{n}_1$ şi $\bar{n}_2$, adică (fig. II.26)

$$\cos \varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\|\bar{n}_1\| \|\bar{n}_2\|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Aplicaţie. Biraport. Fie d: $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $t \in \mathbb{R}$ o dreaptă orientată prin versorul director $\bar{e} = l\bar{i} + m\bar{j}$ şi M, N două puncte ale acestei drepte. Numărul ρ_{MN} definit prin $\overline{MN} = \rho_{MN}\bar{e}$ se numeşte *mărimea relativă a segmentului* $[MN]$.

Considerăm că pe dreapta d au fost fixate punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$ corespunzătoare valorilor t_1, t_2, t_3, t_4 ale parametrului (fig. II.27), Numărul

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\rho_{M_1 M_2}}{\rho_{M_2 M_3}} : \frac{\rho_{M_1 M_4}}{\rho_{M_4 M_3}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_4}$$

se numeşte *biraport* al cuaternei ordonate (M_1, M_2, M_3, M_4). Un biraport de valoare -1 se numeşte *armonic;* în acest caz se spune că perechea (M_1, M_3) divide armonic perechea (M_3, M_4). Diviziunea armonică este deci caracterizată prin

$$\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_4} = -1.$$

Dacă M_1 este luat drept origine pe d, adică $t_1 = 0$, atunci această ecuaţie se reduce la

$$\frac{2}{t_3} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4}.$$

Cu alte cuvinte t_3 este medie armonică a numerelor t_2 şi t_4.

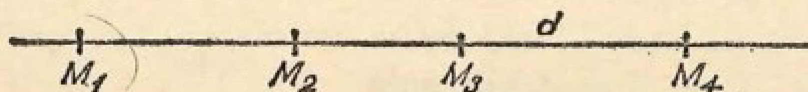


Fig. II. 27

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau dreptele d_1: $x=1+2t$, $y=1-t$, $t\in\mathbb{R}$ şi d_2: $x-y+1=0$.

1) Să se orienteze d_1 şi d_2.

2) Să se determine unghiurile directoare ale dreptelor d_1 şi d_2.

3) Să se găsească unghiul dintre d_1 şi d_2.

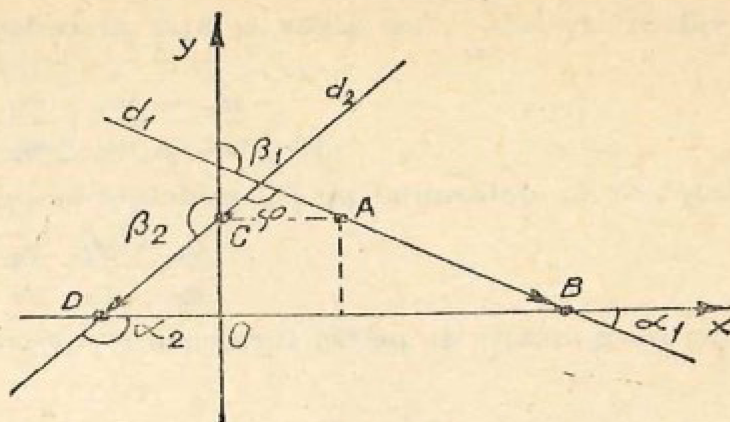


Fig. II. 28

Soluţie (fig. II. 28). 1) Dreapta d_1 trece prin punctul $A(1,1)$ şi are vectorul director $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$. Fie B punctul de pe d_1 cu proprietatea $\overline{AB}=\bar{a}$, adică $B(3, 0)$. Sensul pozitiv pe d_1 este sensul de la A la B.

Dreapta d_2 trece prin punctul C (0, 1) şi are vectorul normal $\bar{n}=\bar{i}-\bar{j}$. Vectorul director al lui d_2 este $\bar{b}=-\bar{i}-\bar{j}$. Fie D punctul de pe d_2 cu proprietatea $\overline{CD}=\bar{b}$, adică $D(-1,0)$. Sensul pozitiv pe d_2 este sensul de la C la D.

2) Fie $\bar{a}_0=\frac{1}{\|\bar{a}\|}\ \bar{a}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{i}-\bar{j})$ versorul director care are acelaşi sens cu $\bar{a}$. Unghiurile directoare α_1, β_1 ale dreptei d_1 rezultă din $\cos\alpha_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta_1=\frac{-1}{\sqrt{5}}$, adică $\alpha_1=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\beta_1=\arccos\frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Analog găsim că $\alpha_2=\frac{3\pi}{4}$, $\beta_2=\frac{3\pi}{4}$ sînt unghiurile directoare ale lui d_2.

3) Unghiul φ dintre d_1 şi d_2 se determină din

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|}=\frac{-2+1}{\sqrt{5}\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}},$$

adică $\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

2. Se consideră dreptele $d_m: x=\frac{2}{m}-\frac{y}{m^2}$, unde m este un parametru real nenul. Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului? Dacă patru drepte din familia d_m taie pe Ox în puncte care formează o diviziune armonică, ce se poate spune despre punctele corespunzătoare de pe Oy?

Soluţie. Se observă că $d_m: m^2x-2m+y=0$. Se constată uşor că prin fiecare punct al mulţimii $(Ox\cup Oy)-\{0\}$ trece o singură dreaptă d_m. Pentru $x\neq 0$ şi $y\neq 0$, ecuaţia de gradul doi în m are soluţiile reale numai dacă $1-xy\geqslant 0$. Rezultă: prin fiecare punct (x, y) caracterizat prin $xy=1$ trece o singură dreaptă d_m, prin fiecare punct (x, y) care satisface relaţiile $xy<1$, $x\neq 0$, $y\neq 0$ trec două drepte distincte, prin punctele (x, y) care satisfac relaţia $xy>1$ nu trece nici o dreaptă.

Fie dreptele d_{m_i}, $i=1, 2, 3, 4$, care taie pe Ox în puncte de abscise x_i, $i=1,2,3,4$, care formează o diviziune armonică, adică

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}:\frac{x_4-x_1}{x_3-x_4}=-1.$$

Evident $x_i = \dfrac{2}{m_i}$. De aceea relația precedentă se transcrie

$$\frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_2} : \frac{m_4 - m_1}{m_3 - m_4} = -1.$$

Dreptele d_m determină pe Oy punctele de ordonate $y_i = 2\, m_i$. De aceea

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_3 - y_4} = -1$$

și astfel punctele de pe Oy formează o diviziune armonică.

§ 8. Distanța de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi

1) Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct din plan și h o dreaptă de ecuație $ax + by + c = 0$. Fie $M_1(x_1, y_1)$ proiecția lui M_0 pe dreapta h(fig. II.29). Lungimea $\|\overline{M_1M_0}\|$ se numește *distanța de la punctul* M_0 *la dreapta* h și se notează cu $d(M_0; h)$. Analitic, $d(M_0; h)$ se poate obține din identitatea

$$\bar{n} \cdot \overline{M_1M_0} = (\pm 1) \|\bar{n}\|\, d(M_0;\ h),$$

factorul ± 1 avînd semnul produsului scalar din partea stîngă. Deci

$$d(M_0;\ h) = \frac{|\bar{n} \cdot \overline{M_1M_0}|}{\|\bar{n}\|}$$

sau

$$d(M_0;\ h) = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Deoarece $M_1 \in h$, rezultă $c = -ax_1 - by_1$ și deci

$$d(M_0;\ h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2) Să presupunem acum că avem o dreaptă h determinată de punctele distincte $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ a cărei ecuație o scriem în forma

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $M_1(x_1, y_1)$ este un alt punct din plan și dacă notăm

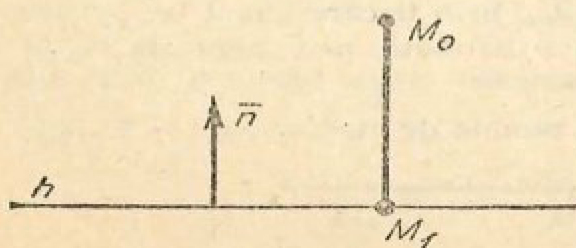


Fig. II. 29

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

atunci

$$d(M_1;\ h) = \frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}.$$

De aceea aria

$$\mathcal{A} = \frac{\| \overline{M_2M_3} \| \, d(M_1;\, M_2M_3)}{2}$$

a triunghiului $M_1M_2M_3$ poate fi calculată cu formula

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mid \Delta \mid.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian xOy se dau punctele $A(1, -1)$, $B(3,2)$. Să se scrie ecuația carteziană implicită a dreptei AB și să se găsească distanța de la origine la dreapta AB.

Soluție. Ecuația, sub formă de rapoarte, a dreptei AB este $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$. Ea se scrie în forma echivalentă $3x - 2y - 5 = 0$. Rezultă

$$d(O;\, AB) = \frac{| 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 5 |}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

2. Se dau punctul $M(3,3)$ și triunghiul ABC determinat de dreptele AB: $x + 2y - 4 = 0$, $BC: 3x + y - 2 = 0$, $CA: x - 3y - 4 = 0$.

1) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

2) Fie P, Q, R proiecțiile punctului M respectiv pe OA, OB și AB. Să se demonstreze că punctele P, Q, R sînt coliniare.

3) Să se scrie ecuația fasciculului de drepte determinat de dreptele AB și PQ. Să se găsească ecuația dreptei din fascicul, care trece prin punctul $N(0, 5)$.

Soluție (fig. II. 30). 1) $\{A\} = AB \cap CA \Rightarrow A(4, 0)$, $\{B\} = AB \cap BC \Rightarrow B(0, 2)$, $\{C\} = BC \cap CA \Rightarrow C(1, -1)$. Ținînd seama de formulă găsim aria $(ABC) = \frac{1}{2} \mid \Delta \mid = 5$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

2) Dreapta MR are ecuația carteziană explicită $y - 3 = 2(x - 3)$. De aceea $\{R\} = AB \cap MR \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0 \Rightarrow R(2, 1)$. Ținînd seama ca $P(3, 0)$, $Q(0, 3)$, se verifică condiția de coliniaritate,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

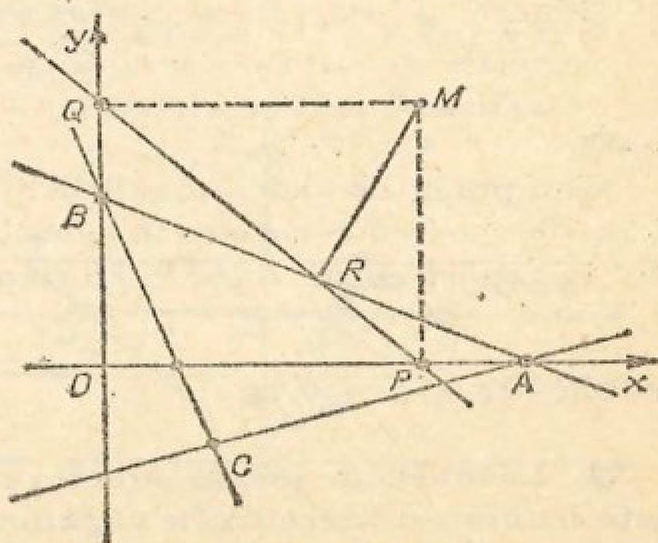


Fig. II. 30

3) Ecuația fasciculului determinat de dreptele AB și PQ: $x + y - 3 = 0$ este $r(x + 2y - 4) + s(x + y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Dreapta din fascicul care trece prin $N(0,5)$ corespunde valorilor r și s care verifică condiția $3r + s = 0$, $s \neq 0$. Ecuația acestei drepte este $2x + y - 5 = 0$.

§ 9. Locuri geometrice

O mulțime de puncte din plan, definită prin specificarea unor proprietăți geometrice ale elementelor sale, se numește *loc geometric*.

În esență, problemele de loc geometric sînt probleme de găsire a unor proprietăți echivalente celor prin care este dată o anumită mulțime, sau altfel spus, probleme de egalitate a două mulțimi. Dar rezolvarea unei probleme de tipul (1) „*punctele unei mulțimi au proprietatea P dacă și numai dacă au proprietatea Q*" nu este totuna cu rezolvarea unei probleme de tipul (2) „*să se găsească locul geometric al punctelor care au proprietatea P*". În general, în problema (2) proprietatea P este dată astfel încît nu este evident cu ce figură geometrică avem de-a face (ipoteză!), iar proprietatea Q nu este specificată. Ea poate fi aleasă de rezolvitor din mulțimea proprietăților echivalente cu P de așa manieră încît să poată spune cu ce figură geometrică este echivalentă mulțimea dată inițial.

Rezolvarea efectivă a unei probleme de loc geometric constă în următoarele:

1) *Verificarea existenței unui punct care posedă proprietatea dată, adică stabilirea faptului că mulțimea dată este vidă sau nu.*

2) *Se consideră un punct (variabil) care posedă proprietatea dată și se stabilește apartenența acestui punct la o figură geometrică $\mathcal{F}$.*

3) *Se verifică dacă orice punct al lui $\mathcal{F}$ convine, adică se analizează dacă este suficient ca un punct să aparțină lui $\mathcal{F}$ pentru a avea proprietatea specificată. De cele mai multe ori reiese că nu putem accepta decît o parte $\mathcal{F}'$ a lui $\mathcal{F}$.*

Figura $\mathcal{F}'$ este locul căutat deoarece:

— orice punct care posedă proprietatea dată aparține necesar lui $\mathcal{F}'$;

— este suficient ca un punct să aparțină lui $\mathcal{F}'$ pentru a avea proprietatea dată.

Din punct de vedere analitic determinarea unui loc geometric este echivalentă cu găsirea ecuației sau ecuațiilor care precizează locul geometric respectiv în raport cu un reper cartezian.

PROBLEME REZOLVATE

1. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este *reuniunea bisectoarelor unghiurilor acestor drepte*. Să se determine ecuațiile celor două bisectoare.

Soluție. Fie dreptele d_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, d_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Condiția de concurență este $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, iar punctul comun are coordonatele:

$$x = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Evident acest punct aparține locului geometric căutat. Fie acum $M_0(x_0, y_0)$ un punct egal depărtat de d_1 și d_2, adică

$$\frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ținînd seama de proprietățile modulelor și de faptul că indicele o poate fi lăsat deoparte, găsim ecuațiile

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

2. Să se găsească locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă.

Soluție. Fie A și B două puncte fixe distincte și k un număr real. Căutăm locul geometric al punctelor M pentru care $d^2(M, A) - d^2(M, B) = k$.

Fie $k = 0$; atunci $d(M, A) = d(M, B)$ și deci M descrie mediatoarea segmentului $[AB]$.

Fie $k \neq 0$ și O mijlocul lui $[AB]$. Fixînd reperul cartezian ca în figura II. 31 rezultă $O(0,0)$, $M(x, y)$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $a > 0$ și relația de definiție este echivalentă cu $[(x + a)^2 + y^2) - [(x - a)^2 + y^2] = k$, adică $x = \frac{k}{4a}$. Astfel M aparține dreptei d: $x = \frac{k}{4a}$, perpendiculară pe AB, care taie pe AB în punctul $C\left(\frac{k}{4a}, 0\right)$. Reciproc, orice punct $M \in d$ satisface condiția inițială și deci locul geometric căutat este dreapta d.

3. Se dau dreptele fixe d: $y = 1$, d' : $y = 2$ și dreapta variabilă $d_\alpha : y = \frac{x}{\sin \alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Fie $\{A_\alpha\} = d \cap d_\alpha$, $\{B_\alpha\} = d' \cap d_\alpha$. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $[A_\alpha B_\alpha]$.

Soluție (fig. II. 32). Deoarece $0 < |\sin \alpha| < 1$, pentru $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pozițiile limită ale dreptei d sînt cele două bisectoare $y = x$ și $y = -x$. Pe lîngă aceasta se observă că

$$\{A_\alpha\} = d \cap d_\alpha \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \dfrac{x}{\sin \alpha} \end{cases}, \ \alpha \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow A(\sin \alpha, 1), \ \alpha \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

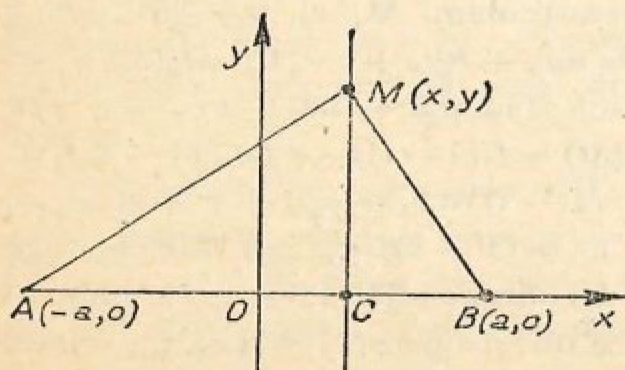


Fig. II. 31

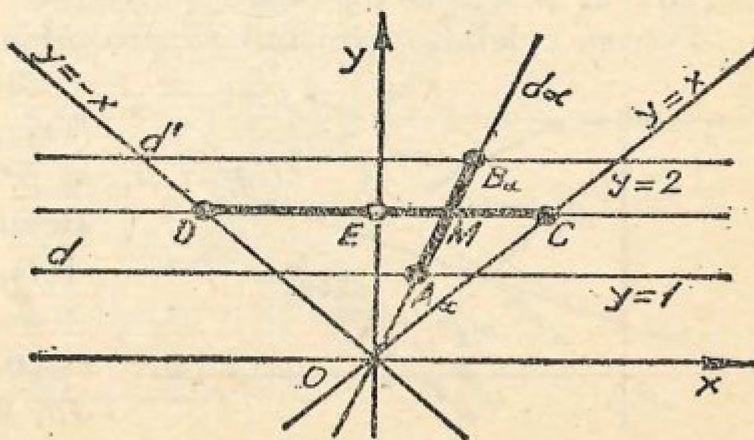


Fig. II. 32

$$\{B_\alpha\} = d' \cap d_\alpha \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \dfrac{x}{\sin\alpha} \end{cases}, \ \alpha \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow B(2\sin\alpha, 2), \ \alpha \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Mijlocul M al segmentului $[A_\alpha B_\alpha]$ are coordonatele

$$x = \frac{3\sin\alpha}{2}, \ y = \frac{3}{2}, \ \alpha \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultă $x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right]$, $y = \frac{3}{2}$, adică locul geometric al punctului M este $[DC] - \{E\}$, unde $D\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ si $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ sînt punctele de intersecție ale dreptei de ecuație $y = \frac{3}{2}$ cu cele două bisectoare.

§ 10. Semiplane

O dreaptă d din plan are proprietatea căsepară planul p în două submulțimi.

Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$. Definim mulțimile

$$p^- = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}, \ d = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\},$$
$$p^+ = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}.$$

Se observă că

$$p^- \cap p^+ = \emptyset, \ p^- \cup d \cup p^+ = p.$$

Teoremă. (fig. II.33) 1) *Mulțimile p^-, p^+, $p^- \cup d$, $p^+ \cup d$ sînt convexe.*

2) *$\forall M_1 \in p^-$, $\forall M_2 \in p^+$, segmentul care unește pe M_1 cu M_2 intersectează pe d.*

Demonstrație. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2$. Segmentul $[M_1M_2]$ care unește pe M_1 cu M_2 are ecuațiile parametrice $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $y = (1-t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$. 1) Presupunem $M_i(x_i, y_i) \in p^-$, $i = 1, 2$, adică $f(x_i, y_i) = ax_i + by_i + c < 0$, $i = 1,2$. Deoarece $f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) = (1-t)(ax_1 + by_1 + c) + t(ax_2 + by_2 + c) < 0$, $\forall t \in [0, 1]$, rezultă $[M_1 M_2] \subset p^-$. Astfel p^- este convexă.

Pentru celelalte mulțimi se procedează analog.

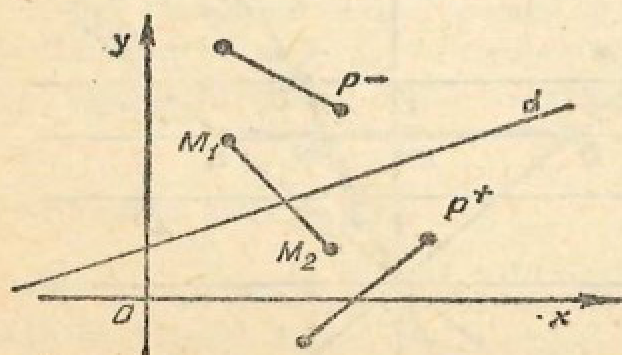


Fig. II. 33

2) Presupunem $M_1(x_1, y_1) \in p^-$, adică $f(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c < 0$; $M_2(x_2, y_2) \in p^+$, adică $f(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c > 0$. Rezultă $\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) = (1-t)(ax_1 + by_1 + c + t(ax_2 + by_2 + c) = (1-t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2)$, $t \in [0, 1]$. Deoarece $\varphi([0, 1])$ este segmentul din $\mathbb{R}$ care unește pe $\varphi(0) = f(x_1, y_1) < 0$ cu $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$, există o valoare $t_0 \in [0,1]$

astfel încît $0 = \varphi(t_0) = a((1 - t_0)x_1 + t_0x_2) + b((1 - t_0)y_1 + t_0y_2) + c$. Deci $d \cap [M_1M_2] = \{((1 - t_0)x_1 + t_0x_2,\ (1 - t_0)y_1 + t_0y_2)\}$.

Implicit în această demonstrație am admis că un punct separă pe $\mathbf{R}$.

Mulțimile p^- și p^+ se numesc *semiplane deschise*, iar mulțimile $p^- \cup d$, $p^+ \cup d$ se numesc *semiplane închise*. Dreapta d se numește *frontiera* semiplanelor.

Avînd în vedere că f păstrează semn constant pentru punctele unui semiplan, pentru aflarea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_0, y_0) și să vedem ce semn are numărul $f(x_0, y_0)$.

Deoarece semiplanele sînt mulțimi convexe, orice intersecție de semiplane este o mulțime convexă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se arate că locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor $d_\alpha : x + y = \alpha$, $d'_\alpha : x - y = \alpha + 2$, $\alpha \in [0, \infty)$ este semidreapta $y + 1 = 0$, $x \geqslant 1$.

Soluție. Dreptele d_α sînt situate în semiplanul închis $x + y \geqslant 0$, iar dreptele d'_α sînt situate în semiplanul închis $x - y \geqslant 2$. De aceea locul geometric se va afla în zona nehașurată în figura II. 34.

Eliminînd parametrul α din $x + y = \alpha$, $x - y = \alpha + 2$, $\alpha \in [0, \infty)$ rezultă semidreapta $y + 1 = 0$, $x \geqslant 1$.

2. Fie ecuația

$$(E)\ x^2(\operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2xy \operatorname{tg} \varphi + y^2 \sin^2 \varphi = 0, \text{ unde } \varphi \neq k\pi;\ (2l + 1)\frac{\pi}{2},$$

$k, l \in \mathbf{Z}$.

1) Se consideră ecuația (E) ca avînd necunoscutele x și y și parametrul φ; se notează cu α și β unghiurile pe care le fac cu axa Ox dreptele definite prin (E). Să se calculeze $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$. Apoi, presupunînd $\varphi = \frac{\pi}{4}$, să se scrie ecuația comună a bisectoarelor unghiurilor formate de cele două drepte.

2) Considerînd ecuația (E) ca avînd necunoscuta φ și parametrii y și x să se determine regiunea din planul xOy pentru care ea admite soluții.

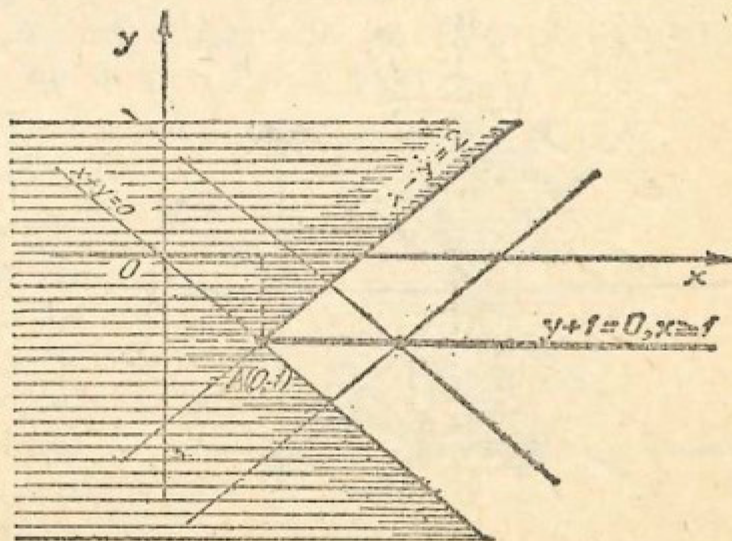


Fig. II. 34

Soluție. 1) Se observă că $x = 0$ implică $y = 0$ și reciproc. Apoi, pentru $x \neq 0$, ecuația (E) se transcrie

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi} + \operatorname{ctg}^2\varphi = 0.$$

Rezultă

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} - \frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\sin^2\varphi-\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} \pm 1.$$

Astfel $\operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{tg}\beta$ pot avea valorile $\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} \pm 1$. De aceea $|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta| = 2$.

Pentru $\varphi = \frac{\pi}{4}$ găsim dreptele $y = 3x$ și $y = x$. Bisectoarele unghiurilor determinate de ele sînt $\frac{y-3x}{\sqrt{10}} = \pm\frac{y-x}{\sqrt{2}}$. Ecuația comună este

$$\left(\frac{y-3x}{\sqrt{10}} - \frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y-3x}{\sqrt{10}} + \frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) = 0 \text{ sau } x^2 + xy - y^2 = 0.$$

2) Pentru $x \neq 0$ se observă că ecuația (E) este echivalentă cu $\frac{y}{x} = \frac{2}{\sin 2\varphi} \pm 1$ sau cu $\sin 2\varphi = \frac{2x}{y \pm x}$. Aceasta are soluții numai dacă $\left|\frac{2x}{y \pm x}\right| \leqslant 1$. Explicitînd modulele găsim că punctul (x, y) trebuie să se afle în intersecția regiunilor: $x > 0$, $y + x \leqslant 0$; $x > 0$; $y - 3x \geqslant 0$; $x < 0$, $y + x \geqslant 0$; $x < 0$, $y - 3x \leqslant 0$; $x > 0$, $y - x \geqslant 0$; $x > 0$, $y + 3x \leqslant 0$; $x < 0$, $y + 3x \geqslant 0$; $x < 0$, $y - x \leqslant 0$, adică în porțiunea dublu hașurată din figura II. 35.

3. Să se determine semnul coeficientului unghiular al dreptei d, dată prin ecuația $(a + b + 1)x + (2a - b)y - 2a - 5 = 0$, ai cărei coeficienți depind de coordonatele unui punct $P(a, b)$, raportat la reperul cartezian aOb.

Soluție. Fie m coeficientul unghiular al dreptei d. Avem $m = -\frac{a+b+1}{2a-b}$, $2a - b \neq 0$. Dreptele d_1 : $a + b + 1 = 0$ și d_2: $2a - b = 0$ împart planul în patru regiuni (fig. II.36). Notînd $f_1(a, b) = a + b + 1$ și $f_2(a, b) = 2a - b$, semnul lui m este dat în tabelul 2.

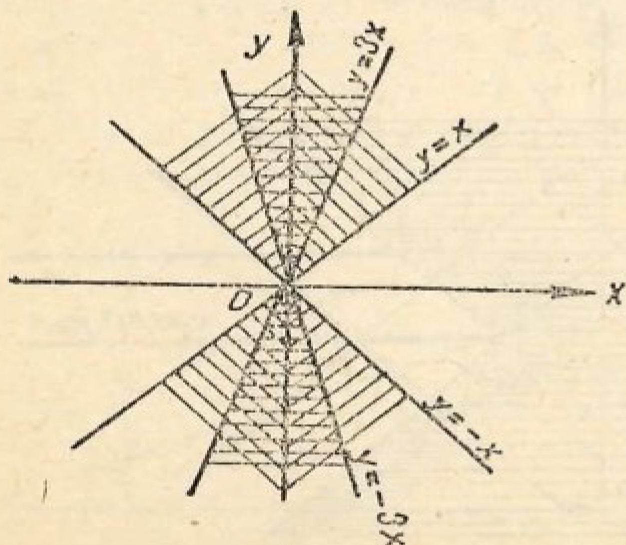


Fig. II. 35

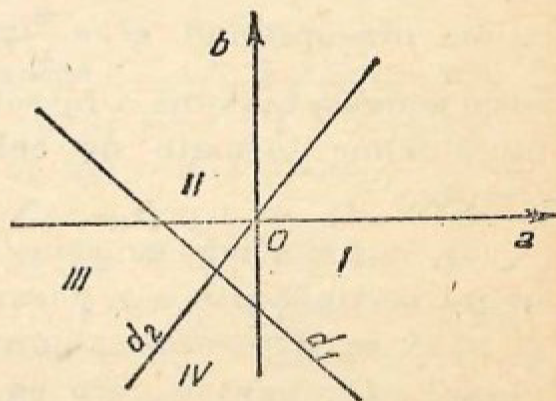


Fig. II. 36

Regiunea	$f_1(a, b)$	$f_2(a, b)$	m
I	+	+	−
II	+	−	+
III	−	−	−
IV	−	+	+

TABELUL 2

§ 11. Probleme de programare liniară în două variabile

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$.

Teoremă. *Dacă funcția f se anulează în trei puncte distincte necoliniare, atunci ea este nulă peste tot.*

Demonstrație. Fie $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$. Ipotezele

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0, \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

implică $a = b = c = 0$ și deci $f(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Consecință. Dacă f ia valori egale în trei puncte distincte necoliniare, atunci f este o funcție constantă.

Teoremă. *Dacă $S \subset \mathbb{R}^2$ este o suprafață poligonală convexă (privită ca intersecție de semiplane), iar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$ este neconstantă, atunci fiecare dintre numerele $\min\limits_{(x,y)\in S} f(x, y)$ sau $\max\limits_{(x,y)\in S} f(x, y)$ este atins cel puțin într-un vîrf al lui S și cel mult pe o latură a lui S.*

Demonstrație. Ecuația $ax + by + c - f = 0$ reprezintă un fascicul de drepte paralele cu linia de reper Δ_c: $ax + by = 0$. Se observă că distanța de la $O(0, 0)$ la dreapta Δ_f: $ax + by + c - f = 0$ este

$$d = \frac{|f - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Această relație arată că extremele funcției $f - c$ sînt proporționale cu extremele lui d. Ducînd $OP \perp \Delta_f$, $RQ \perp \Delta_f$ (fig. II. 37) avem $RQ = d$ și deci extremele lui d vor fi atinse cel puțin în unele vîrfuri ale lui S și cel mult pe o latură a lui S.

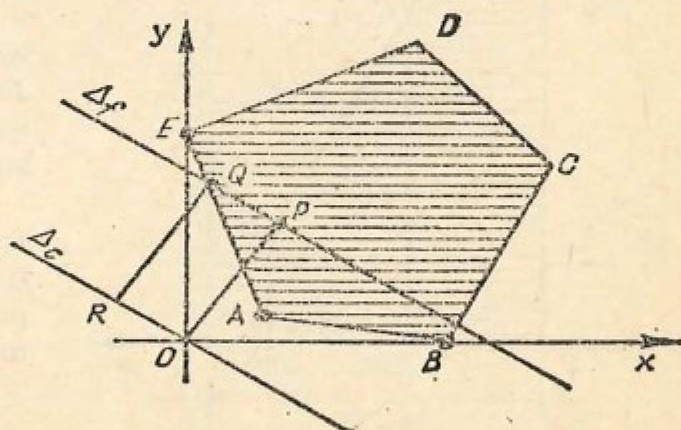


Fig. II. 37

Generalizare. Dacă $S \subset \mathbb{R}^2$ este o intersecție de semiplane care posedă cel

puţin un vîrf, atunci unul dintre numerele $\min_{(x,y)\in S} f(x, y)$ sau $\max_{(x,y)\in S} f(x, y)$, acel care există, este atins cel puţin într-un vîrf al lui S.

Problemele de programare liniară în două variabile sînt probleme de următorul tip: *să se determine minimul sau maximul funcţiei* $(x, y) \to f(x, y) = ax + by + c$ cu restricţiile $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a_i x + b_i y \geq c_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Avînd în vedere teorema precedentă, rezolvarea unui program liniar în două variabile se poate face în felul următor. Se trasează dreptele de ecuaţii $x = 0$, $y = 0$, $a_i x + b_i y = c_i$, $i = 1,2, \ldots, m$, şi ţinînd seama de teorema referitoare la separarea planului în regiuni se pune în evidenţă mulţimea convexă S. Se determină vîrfurile lui S şi apoi se compară valorile lui f în aceste puncte. Evident această metodă nu este eficientă decît dacă numărul de restricţii este relativ mic.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un atelier produce două tipuri de piese A şi B. Tipul A este calitativ superior tipului B. Beneficiul net este de 2 lei pentru tipul A şi de 1,5 lei pentru tipul B. Timpul de fabricaţie pentru tipul A este de două ori mai mare decît timpul de fabricaţie pentru B. Dacă toate piesele ar fi de tipul B, atelierul ar putea produce 1 000 piese pe zi. Aprovizionarea cu materiale ajunge pentru 800 piese (tipul A şi B), iar capacitatea atelierului este cel mult 400 piese de tipul A şi 700 piese de tipul B.

Cîte piese de tipul A şi cîte de tipul B trebuie fabricate într-o zi pentru ca beneficiul total al atelierului să fie maxim?

Soluţie. Fie x şi y numărul de piese de tipul A respectiv B. Restricţiile sînt

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 400, \quad 0 \leq y \leq 700 \\ x + y \leq 800 \\ 2x + y \leq 1\,000, \end{cases}$$

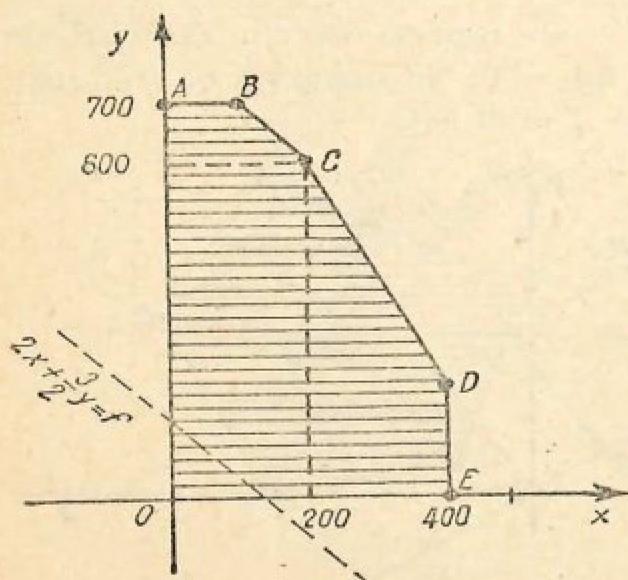


Fig. II. 38

iar funcţia de optimizat este definită prin $f(x, y) = 2x + \frac{3}{2} y$. Construim dreptele de ecuaţii $x = 400$, $y = 700$, $x + y = 800$, $2x + y = 1\,000$ şi astfel obţinem hexagonul $OABCDE$ unde $O(0, 0)$, $A(0, 700)$, $B(100, 700)$, $C(200, 600)$, $D(400, 200)$, $E(400, 0)$ (fig. II. 38). Punctele din interiorul şi de pe laturile acestui hexagon satisfac restricţiile problemei.

Deoarece $f(0, 0) = 0$, $f(0, 700) = 1050$, $f(100, 700) = 1\,250$, $f(200, 600) = 1\,300$, $f(400, 200) = 1\,100$, $f(400, 0) = 800$ rezultă că punctul de maxim este $C(200, 600)$, iar $\max f(x, y) = 1\,300$.

2. O secţie a unei fabrici produce două tipuri de aparate. Pentru aceasta

are nevoie de piese furnizate de o altă întreprindere, fiind însă obligată să comande zilnic cel puțin o cantitate de piese din care s-ar putea face 80 de aparate de primul tip sau 60 de aparate de al doilea tip. Capacitatea de montaj este de cel mult 100 de aparate pe zi din ambele tipuri. Zilnic sînt solicitate la vînzare cel puțin 40 de aparate de primul tip și cel puțin 30 de aparate de al doilea tip. Pentru realizarea unui aparat de primul tip se cheltuiesc 2 000 lei, iar pentru realizarea unui aparat de al doilea tip se cheltuiesc 4 000 lei. Să se stabilească planul de producție zilnic care se realizează cu minimum de cheltuieli.

Soluție. Notînd cu x și y numărul de aparate sîntem conduși la următoarele restricții

$$\begin{cases} \dfrac{ax}{80} + \dfrac{ay}{60} \geqslant a, \\ x + y \leqslant 100 \\ x \geqslant 40, \ y \geqslant 20, \\ x, \ y = \text{numere întregi, iar } a \text{ este cantitatea minimă de piese impusă de furnizori.} \end{cases}$$

Funcția obiectiv reprezintă cheltuielile, adică $f(x, y) = 2\,000x + 4\,000y$. Lăsînd deoparte condiția $x, y =$ întregi, patrulaterul restricțiilor $ABCD$ are vîrfurile $A\left(\frac{160}{3}, 20\right)$, $B(80, 20)$, $C(40, 60)$, $D(40, 30)$. Găsim $f(A) = \frac{560\,000}{3}$, $f(B) = 240\,000$, $f(C) = 320\,000$, $f(D) = 200\,000$, adică $A\left(\frac{160}{3}, 20\right)$ este punctul de minim pentru problema modificată (fig. II. 39).

Se impune să cercetăm punctul $M_0(54,20)$. Se constată că $f(M_0) \leqslant f(x, y)$, $\forall (x, y)$ din patrulaterul $ABCD$, $x, y =$ întregi. De aceea $x = 54$, $y = 20$ și $\min f(x, y) = 188\,000$ este soluția problemei.

3. Să se găsească maximul funcției $z = 4(1 + \lambda)x + 2y$ pe mulțimea $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 6$, $3x + 2y \leqslant 10$, știind că λ este un parametru real.

Soluție. Se observă că punctele din interiorul și de pe laturile triunghiului din figura II. 40 satisfac restricțiile problemei. Apoi ținem seama că pentru a rezolva un program liniar este suficient să examinăm numai vîrfurile. De aceea calculăm $z_0 = 0$, $z_A = \frac{40}{3}(1 + \lambda)$ și $z_B = 10$. Comparînd aceste trei numere ajungem la concluzia că

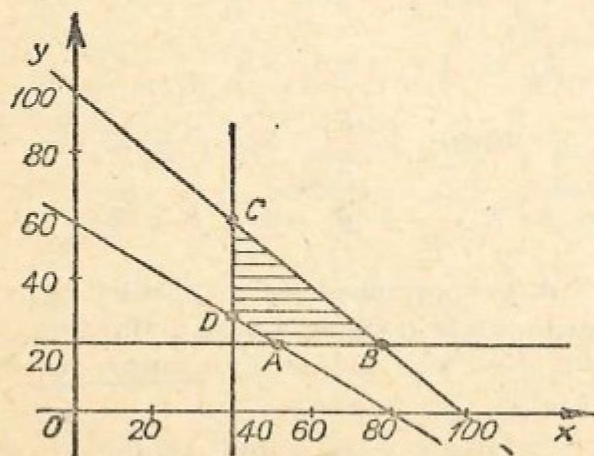


Fig. II. 39

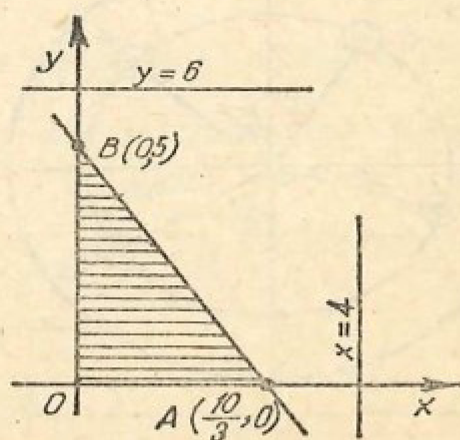


Fig. II. 40

pentru $\lambda \leq -\frac{1}{4}$ avem $\max z = z_B = 10$ și B este punctul de maxim, iar pentru $\lambda > -\frac{1}{4}$ avem $\max z = z_A = \frac{40}{8}(1 + \lambda)$ și A este punctul de maxim.

§ 12. Probleme propuse

1. Într-un reper ortonormat $\{O; i, j\}$, se consideră punctele $A(1,2)$, $B(6, -1)$, $C(7, 4)$.

1) Să se găsească coordonatele punctului D, astfel încît $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$.

2) Să se găsească coordonatele punctului E, astfel încît $\overline{CE} = 2\overline{EB}$.

R. 1) $D(12, 1)$; 2) $E\left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2. Pe o mașină de găurit în coordonate avem de prelucrat piesa din figura II. 41. Să se determine coordonatele carteziene și coordonatele polare ale punctelor A, B, C, D în care urmează a se realiza găurirea.

3. În planul p se consideră reperul cartezian xOy. Să se arate că nu există nici un triunghi echilateral cu toate vîrfurile de coordonate numere întregi.

Indicație. Se presupune că $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(c, d)$ sînt vîrfurile, a, b, c, d fiind întregi. Notînd cu r pătratul lungimii laturilor și folosind identitatea $(ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2$ rezultă contradicția $\frac{2(ad - bc)}{r} = \sqrt{3}$, expresia din stînga fiind un număr rațional.

4. Să se scrie ecuația carteziană a dreptei d determinată de punctul $M_0(x_0, y_0)$ și vectorul director $\bar{a}(u, v)$:

1) $M_0(2, 1)$, $\bar{a}(1, 3)$.

2) $M_0(2, 1)$, $\bar{a}(1, -1)$.

5. Să se găsească mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan, ale căror coordonate verifica relația:

1) $\sin 3y = -\cos 2x$,

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + y\right) = 0$,

3) $|x| + |y| = 4$.

Indicație. 1) $\frac{\pi}{2} - 3y = \pm(\pi - 2x) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{x}{3} + y = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

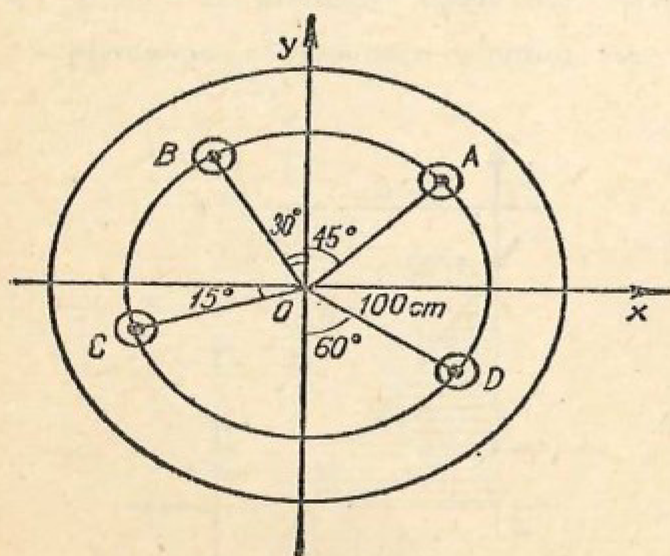


Fig. II. 41

6. Să se găsească ecuațiile laturilor și coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului ABC ale cărui vîrfuri sînt punctele $A(5, 0)$, $B(1, 2)$, $C(-3, -2)$.

7. Latura $[AB]$ a unui triunghi ABC este situată pe dreapta d: $3x + 2y - 16 = 0$.

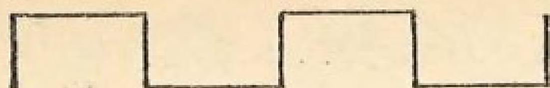


Fig. II. 42



Fig. II. 43

Să se determine coordonatele vîrfurilor triunghiului, ştiind că abscisele vîrfurilor A şi B sînt egale cu 2, respectiv 6, iar centrul de greutate G al triunghiului are coordonatele $(-1,\ 0)$.

R. $A(2,\ 5)$, $B(6,\ 2)$, $C(-11,\ -7)$.

8. Se dau punctele distincte $M_1(\cos \alpha t,\ \sin \alpha t)$ şi $M_2(\cos \beta t,\ \sin \beta t)$.

1) Să se calculeze $d(M_1,\ M_2)$.

2) Să se determine coordonatele mijlocului M al segmentului $[M_1M_2]$ şi să se calculeze $d(O,\ M)$.

3) Notînd cu M_1' proiecţia lui M_1 pe Ox, să se determine α şi β astfel încît dreptele $M_1'M$ să fie perpendiculare pe OM_1 pentru orice t.

R. 1) $d(M_1,\ M_2) = 2\left|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}t\right|$, 2) $d(O,\ M) = \left|\cos\frac{\beta-\alpha}{2}t\right|$,

3) $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}t - \cos \alpha t = 0\ \ \forall t \in \mathbf{R} \Rightarrow \beta = 3\alpha$.

9. Să se scrie ecuaţia dreptei ce conţine punctul $A(4,\ -2)$ şi este paralelă cu dreapta $d\colon 3x + y - 1 = 0$.

10. Să se traseze graficele funcţiilor $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ în următoarele cazuri:

1) $f(x) = \sqrt{4x^2}$, 2) $f(x) = 2\sqrt{(x-1)^2}$,

3) $f(x) = \sqrt{x + |x|}$, 4) $f(x) = 2 - |x - 2| - x$.

11. Se consideră *crenelul* din figura II. 42. Fixînd un reper cartezian adecvat, să se stabilească ecuaţia carteziană explicită a acestui crenel.

Aceleaşi probleme pentru *dinţii de ferăstrău* din figura II. 43, pentru *scara* din figura II. 44 şi pentru *cremaliera* din figura II. 45.

12. Se dau punctele $A(3,\ 2)$, $B(-5,\ 4)$, $C(-3,\ -4)$, $D(2,\ -3)$. Fie $\{L\} = BA \cap CD$ şi $\{M\} = AD \cap BC$.

1) Să se arate că dreapta LM este paralelă cu AC.

2) Să se arate că dreapta BD trece prin mijlocul lui $|LM|$.

Indicaţie. 1) $L\left(\frac{41}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$, $M\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{44}{3}\right)$. Dreptele LM şi AC admit vectorul director $\vec{i} + \vec{j}$; 2) $BD\colon x + y + 1 = 0$.

13. Să se scrie ecuaţiile mediatoarelor şi ecuaţiile înălţimilor triunghiului ale cărui vîrfuri sînt $A(4,\ 6)$, $B(-2,\ 2)$, $C(2,\ -4)$.

Să se calculeze: 1) coordonatele centrului şi raza cercului circumscris triunghiului ABC, 2) coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

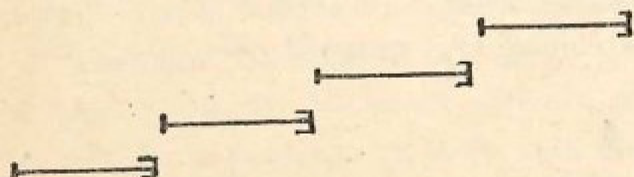


Fig. II. 44

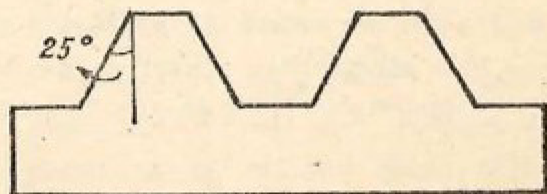


Fig. II. 45

14. Suporturile laturilor $[AB]$ şi $[AC]$ ale unui triunghi ABC au respectiv ecuaţiile $4x + y - 8 = 0$, $4x + 5y - 24 = 0$ iar vîrfurile B şi C sînt situate pe axa Ox.

Să se scrie ecuaţia medianei corespunzătoare vîrfului A.

R. $4x + 3y - 16 = 0$.

15. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încît punctul de intersecţie al dreptelor $d_1 : y = 2x + 5$ $d_2 : y = mx - 3$ să fie situat pe bisectoarea a doua a unghiului format de axele de coordonate.

R. $m = -\frac{14}{5}$.

16. Să se discute în raport cu parametrul $m \in \mathbb{R}$, poziţia următoarelor două drepte: $d_1 : mx + 2y = 8$, $d_2 : x + (m - 1)y = 4$.

17. Se consideră *treapta unitate* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$ şi dreapta $d_m : mx - y - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încît intersecţia dintre graficul lui σ şi d_m să fie nevidă.

Să se formuleze şi să se rezolve o problemă asemănătoare utilizînd funcţia *modul* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Indicaţie. Se determină m astfel încît sistemul $y = mx - 1$, $y = \sigma(x)$ să admită soluţie.

18. O dreaptă variabilă d, care trece prin punctul $A(0, 5)$ taie dreptele $d_1 : x - 2 = 0$ şi $d_2 : x - 1 = 0$, respectiv în punctele B şi C.

Să se arate că paralela dusă prin B la OC trece printr-un punct fix.

Indicaţie. $d : rx + s(y - 5) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Paralela dusă prin B la OC are ecuaţia $rx + s(y - 5x + 5) = 0$ $s \neq 0$. Coordonatele punctului fix sînt $(0, -5)$.

19. Să se demonstreze că dreapta variabilă $d_m : (m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 2)y - 3m + 2 = 0$ trece printr-un punct fix, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

Indicaţie. Se ordonează după puterile lui m şi se identifică cu zero. Rezultă $A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

20. O rază de lumină care trece prin punctul de coordonate $(3,1)$ se reflectă pe dreapta $d : x - y + 2 = 0$ şi apoi trece prin punctul $A(1, 1)$. Să se găsească ecuaţiile parametrice ale razei incidente şi ale celei reflectate.

21. Vîrfurile unui patrulater $ABCD$ sînt $A(4,3)$, $B(5, -4)$, $C(-1, -3)$, $D(-3, -1)$.

1) Să se calculeze coordonatele punctelor E şi F, unde $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = BC \cap AD$.

2) Figura $ABCDEF$ se numeşte *patrulater complet*.

Să se scrie ecuaţiile diagonalelor AC, BD, EF şi să se verifice că mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$ sînt trei puncte coliniare.

3) Fie $\{M\} = AC \cap EF$, $\{N\} = BD \cap EF$. Să se verifice că punctele E, M, N, F formează o diviziune armonică.

22. Să se determine ecuaţiile dreptelor ce trec prin punctul $A(1, 1)$ şi sînt echidistante faţă de punctele $B(-1, 0)$ şi $C(-1, -1)$.

Indicaţie. Ecuaţia fasciculului cu vîrful $A(1, 1)$ este $r(x - 1) + s(y - 1) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Se caută dreptele din acest fascicul care sînt echidistante faţă de B şi C.

23. Raportăm planul p la un reper cartezian şi considerăm punctul $M(x, y)$ ale cărui coordonate satisfac relaţia

$$\frac{4x + 2y + 8}{3x - y + 1} = \frac{5}{2}.$$

1) Să se arate că punctul M aparţine unei drepte fixe d.

2) Să se afle minimul expresiei $x^2 + y^2$ cînd $M \in d - \{M_0(-1, -2)\}$.

R. 1) d: $7x - 9y - 11 = 0$; 2) $\frac{121}{130}$.

24. Să se găsească valoarea minimă a lui $a^2 + b^2$ cînd $a, b \in \mathbb{R}$, iar ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel puțin o rădăcină reală.

Indicație. Pentru x fixat ecuația reprezintă o dreaptă d în planul aOb. Distanța de la originė la punctul de coordonate (a, b) trebuie să fie egală cu distanța de la origine la dreapta d. Deci.

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{x^4 + 1}{\sqrt{(x^3 + x)^2 + (x^2)^2}},$$

încît problema pusă se reduce la aflarea minimului global al funcției definită de pătratul expresiei din dreapta. Rezultă min $(a^2 + b^2) = \frac{4}{5}$.

25. Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $M(4, 3)$ și care intersectează semiaxele pozitive Ox, Oy, în două puncte A, B astfel încît triunghiul dreptunghic AOB, să aibă aria egală cu 27.

Indicație. Se folosește ecuația fasciculului cu vîrful $M(4, 3)$, adică $r(x - 4) + s(y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$.

26. Să se expliciteze soluțiile în $\mathbb{R}^2$ pentru:

$$1)\ |x| + |y| - 2 > 0,\ 2)\ 2 < |x - 1| + |y - 2| - 3 < 4$$

$$3)\ (x - y + 4)(2x - 3y + 6) > 0.$$

Indicație. Se consideră că (x, y) sînt coordonatele unui punct din plan și se utilizează împărțirea planului în regiuni.

27. Pe axa Ox se consideră punctele fixe A, B, C. Prin C se duce o dreaptă variabilă care întîlnește prima bisectoare a axelor în M și axa Oy în N. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AM și NB.

R. O dreaptă ce trece prin origine.

28. Se consideră reperul cartezian xOy, un punct fix $A(a, 0)$ pe Ox și un punct fix $B(0, a)$ pe Oy astfel încît $a > 0$. Un punct P se mișcă pe segmentul $[OB]$, iar un punct P' se mișcă pe semidreapta By astfel încît $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OP'A = \theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului APP'.

R. Semidreapta paralelă și de același sens cu Oy de origine $D(a, a)$.

29. O funcție $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ se numește *funcție liniar afină*. Să se arate că restricția unei funcții liniar afine la un segment [AB] este sau o constantă sau își atinge extremele globale în extremitățile A și B.

Indicație. Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ atunci $[AB]$: $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$. Rezultă: $\varphi(t) = f(x, y) = f(x_1, y_1) + t(f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1))$, $t \in [0, 1]$.

30. În cadrul unei C.A.P. sînt destinate 8 ha teren pentru a se cultiva două feluri de plante A și B. Investițiile necesare pe hectar sînt 2 000 lei respectiv 5 000 lei, iar cîștigul net pe hectar este 3 000 lei respectiv 9 000 lei. C.A.P.-ul dispune de o sumă de 25 000 lei.

Pe cîte hectare trebuie cultivate fiecare din aceste feluri de plante ca să se obţină un cîştig maxim?

R. $x = 5$ ha, $y = 3$ ha, $\max f(x, y) = 33\ 000$ lei.

31. O întreprindere de construcţii trebuie să realizeze un complex de locuinţe însumînd 900 garsoniere, 2 100 apartamente cu două camere şi 1 400 apartamente cu trei camere. Se preconizează două tipuri de blocuri: primul tip cuprinde 40 de apartamente cu trei camere, 30 de apartamente cu două camere şi 10 garsoniere şi costă 4 milioane lei, iar al doilea tip este format din 20 de apartamente cu trei camere, 50 de apartamente de două camere şi 30 de garsoniere, avînd costul de 5 milioane lei. Să se stabilească cîte blocuri de fiecare fel trebuie construite astfel încît cheltuielile de construcţie să fie minime.

R. 20 de blocuri de primul tip şi 30 de blocuri de al doilea tip.

Capitolul III

IZOMETRII

§ 1. Transformări geometrice

Fie p un plan. O funcţie $\mathcal{F}: p \to p$ sau o restricţie a unei asemenea funcţii se numeşte *transformare geometrică*. Transformarea geometrică $\mathcal{F}: p \to p$ ataşează fiecărui punct $M \in p$ un alt punct $M' \in p$ pe care îl notăm cu $\mathcal{F}(M)$, (fig. III. 1). Mulţimea tuturor punctelor $\mathcal{F}(M)$, $M \in p$, se numeşte *imaginea* lui $\mathcal{F}$ şi se notează cu $\mathcal{F}(p)$. Evident $\mathcal{F}(p) \subseteq p$. Un punct M_0 cu proprietatea $\mathcal{F}(M_0) = M_0$ se numeşte *punct fix* al funcţiei $\mathcal{F}$.

Transformarea geometrică $\mathcal{F}$ se numeşte:

1) *injectivă*, dacă relaţiile $\forall M_1, M_2 \in p$, $\mathcal{F}(M_1) = \mathcal{F}(M_2) \in p$ implică $M_1 = M_2$ (echivalent $\forall M_1, M_2 \in p$, $M_1 \neq M_2 \Rightarrow \mathcal{F}(M_1) \neq \mathcal{F}(M_2)$);

2) *surjectivă*, dacă $\forall M' \in p$, $\exists M \in p$ astfel încît $\mathcal{F}(M) = M'$ (echivalent $\mathcal{F}(p) = p$);

3) *bijectivă*, dacă este injectivă şi surjectivă. Aceasta înseamnă că fiind dat un punct $M' \in p$ există un punct unic $M \in p$ astfel încît $\mathcal{F}(M) = M'$. Existenţa este asigurată de faptul că $\mathcal{F}$ este surjectivă şi unicitatea decurge din faptul că $\mathcal{F}$ este injectivă.

Dacă $\mathcal{F}: p \to p$ şi $\mathcal{G}: \mathcal{F}(p) \to p$ sînt două transformări geometrice atunci prin $M \to (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(M) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(M))$, $\forall M \in p$, definim *transformarea produs* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}: p \to p$ (fig. III. 2). Produsul transformărilor este o operaţie asociativă, adică $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) \circ \mathcal{H} = \mathcal{G} \circ (\mathcal{F} \circ \mathcal{H})$.

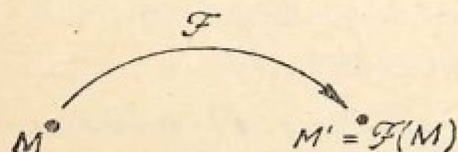


Fig. III. 1

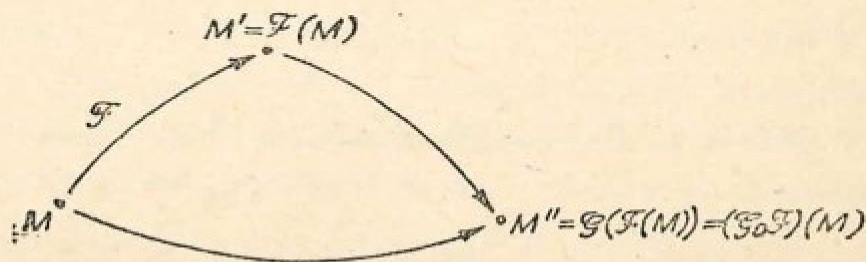


Fig. III. 2

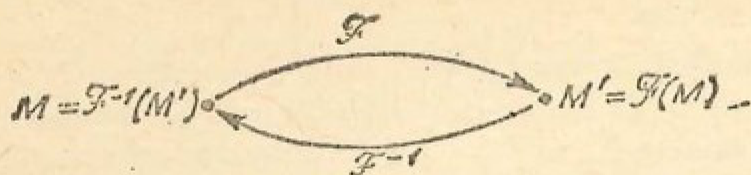


Fig. III. 3

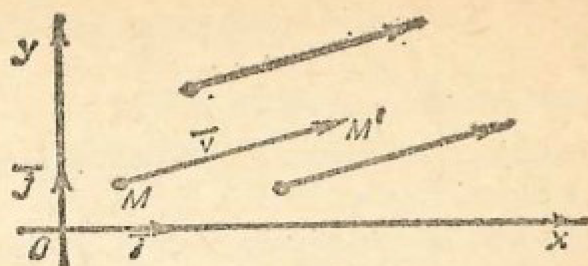


Fig. III. 4

Unei transformări geometrice bijective $\mathcal{F}: p \to p$ i se poate atașa transformarea geometrică (unică!) $\mathcal{G}: p \to p$ astfel încît $\mathcal{G}(M') = M \in p$ cu proprietatea $\mathcal{F}(M) = M'$. Transformările geometrice $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ satisfac relațiile $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(M) = M$, $\forall M \in p$, $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(M') = M'$, $\forall M' \in p$. Pe scurt, $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_p$, unde 1_p este *identitatea* pe p, adică transformarea geometrică caracterizată prin $1_p(M) = M$, $\forall M \in p$. Invers, dacă unei transformări geometrice $\mathcal{F}: p \to p$ i se poate atașa o transformare geometrică $\mathcal{G}: p \to p$ care să satisfacă relațiile $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_p$, atunci $\mathcal{F}$ este în mod necesar o bijecție. Transformarea geometrică $\mathcal{G}$ se numește *inversa* lui $\mathcal{F}$ și deseori se notează cu $\mathcal{F}^{-1}$ (fig. III. 3).

Dacă $\mathcal{F}: p \to p$ și $\mathcal{G}: p \to p$ sînt transformări geometrice bijective, atunci $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ este tot bijectivă și $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{G}^{-1}$. De asemenea, pentru orice bijecție $\mathcal{F}: p \to p$ se satisfac $1_p \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ 1_p = \mathcal{F}$.

§ 2. Translații

Fie planul p și mulțimea vectorilor liberi V. Notăm cu M, M' două puncte din plan și cu $\bar{v}$ un vector liber fixat.

Definiție. Transformarea geometrică $\mathcal{T}: p \to p$ definită prin $M' = \mathcal{T}(M)$, $\overline{MM'} = \bar{v}$ se numește translație de vector $\bar{v}$ (fig. III. 4).

Definiția este corectă deoarece fiecărui punct $M \in p$ i se asociază un punct și numai unul singur $M' \in p$ determinat de faptul că segmentul orientat $\overline{MM'}$ trebuie să fie reprezentantul vectorului $\bar{v}$. În particular translația de vector $\bar{0}$ este identitatea 1_p.

Evident, dacă se dau punctul A și imaginea sa A', atunci există o singură translație care duce pe A în A' și anume translația de vector $\overline{AA'}$.

Teoremă. 1) *Dacă $\mathcal{T}_1$ este translația de vector $\bar{v}_1$ și $\mathcal{T}_2$ este translația de vector $\bar{v}_2$, atunci produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația de vector $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$.*

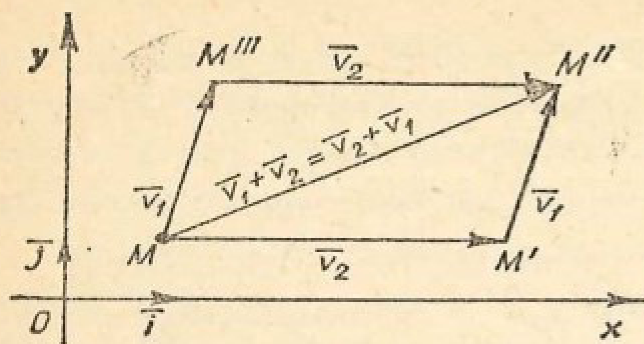


Fig. III. 5

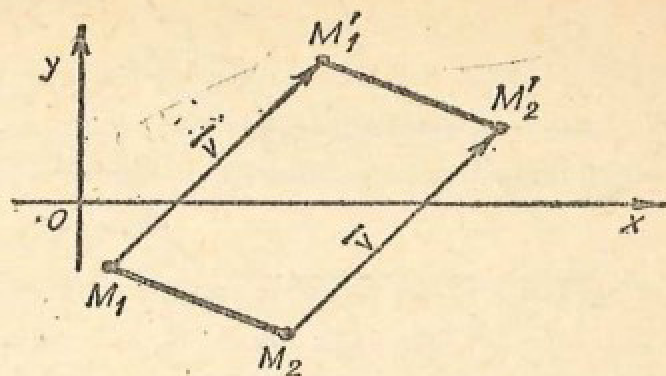


Fig. III. 6

2) *Dacă $\mathcal{T}$ este translația de vector $\bar{v}$, atunci $\mathcal{T}^{-1}$ există și este translația de vector $-\bar{v}$.*

Demonstrație. 1) Fie $\mathcal{T}_1$ translația de vector $\bar{v}_1$, adică $M''' = \mathcal{T}_1(M)$, $\overline{MM'''} = \bar{v}_1$ și $\mathcal{T}_2$ translația de vector $\bar{v}_2$, adică $M'' = \mathcal{T}_2(M''')$, $\overline{M'''M''} = \bar{v}_2$ (fig. III. 5). Produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ este translația de vector $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$, adică $M'' = (\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2)(M)$, $\overline{MM''} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$. Analog $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația de vector $\bar{v}_2 + \bar{v}_1$ și deci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$.

2) Temă

Teorema precedentă conține elemente suficiente pentru a afirma că mulțimea tuturor translațiilor planului p este un grup comutativ în raport cu operația produs *(grupul translațiilor)*.

Raportăm planul p la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$. Presupunem că punctul M are coordonatele (x, y), punctul M' are coordonatele (x', y'), iar $\bar{v} = h\bar{i} + k\bar{j}$.

Teoremă. *Translația $\mathcal{T}$ de vector $\bar{v} = h\bar{i} + k\bar{j}$ este caracterizată prin ecuațiile*

$$\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Demonstrație. Relația de definiție $\overline{MM'} = \bar{v}$ este echivalentă cu $(x' - x)\bar{i} + (y' - y)\bar{j} = hi + kj$. Rezultă $x' - x = h$, $y' - y = k$, adică $x' = x + h$, $y' = y + k$.

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra ușor proprietatea unei translații de a păstra distanța dintre puncte (fig. III. 6). Într-adevăr, dacă prin translația $\mathcal{T}$ de vector $\bar{v} = h\bar{i} + k\bar{j}$ punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2$, au imaginile $M_i'(x_i', y_i')$, $x_i' = x_i + h$, $y_i' = y_i + k$, $i = 1,2$, atunci

$$d(M_1', M_2') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(M_1, M_2)$$

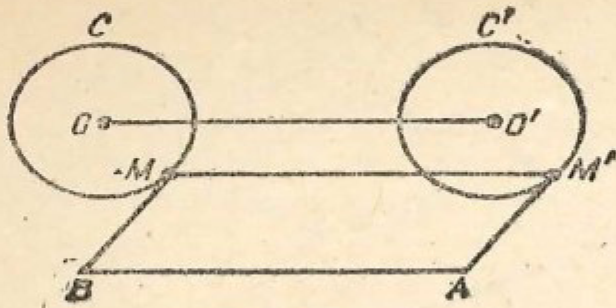


Fig. III. 7

1. Fie segmentul $[AB]$ și cercul C de centru O și rază r. Fiecărui punct M de pe cercul C i se atașează punctul M' astfel încît $ABMM'$ să fie un paralelogram. Să se găsească mulțimea punctelor M'.

Soluție. Deoarece $ABMM'$ este un paralelogram rezultă $\overline{MM'} = \overline{BA}$ (fig. III. 7). Punctul M' este transformatul lui M prin translația de vector $\overline{BA}$. De aceea, atunci cînd M descrie pe C, punctul M' descrie un cerc cu centrul O', $\overline{OO'} = \overline{BA}$, de rază r.

2. Fie segmentul $[AB]$ și două drepte concurente d și d'. Să se determine punctul M pe d și punctul M' pe d' astfel încît $ABMM'$ să fie un paralelogram.

Soluție. Fie d'' imaginea lui d prin translația de vector $\overline{BA}$ și $\{M'\} = d' \cap d''$. Deoarece $ABMM'$ este un paralelogram rezultă $\overline{MM'} = \overline{AB}$, adică M este imaginea lui M' prin translația de vector $\overline{BA}$ (fig. III. 8).

3. Se dă triunghiul de vîrfuri $A(3,2)$, $B(1,5)$, $C(-2, -1)$ și translația $\mathcal{T}$ determinată de punctele $O(0,0)$ și O' $(1,2)$. Să se găsească $A' = \mathcal{T}(A)$, $B' = \mathcal{T}(B)$, $C' = \mathcal{T}(C)$, $\mathcal{T}(AB)$, $\mathcal{T}(AC)$, $\mathcal{T}(BC)$ și să se verifice că $\mathcal{T}(AB) = A'B'$, $\mathcal{T}(AC) = A'C'$, $\mathcal{T}(BC) = B'C'$.

Soluție. (fig. III. 9). Translația $\mathcal{T}$ este determinată de vectorul $\overline{OO'} = \bar{i} + 2\bar{j}$. Astfel ea are ecuațiile $x' = x + 1$, $y' = y + 2$.

Punînd $x = 3$, $y = 2$ găsim $x' = 4$, $y' = 4$ și deci $A'(4, 4)$. Analog $B'(2, 7)$, $C'(-1, 1)$. Se observă că $AB: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{3}$ și $A'B': \frac{x-4}{-2} = \frac{y-4}{3}$. Pe de altă parte $\mathcal{T}(AB): \frac{(x'-1)-3}{-2} = \frac{(y'-2)-2}{3}$ și deci $\mathcal{T}(AB) = A'B'$. Analog se verifică și celelalte relații.

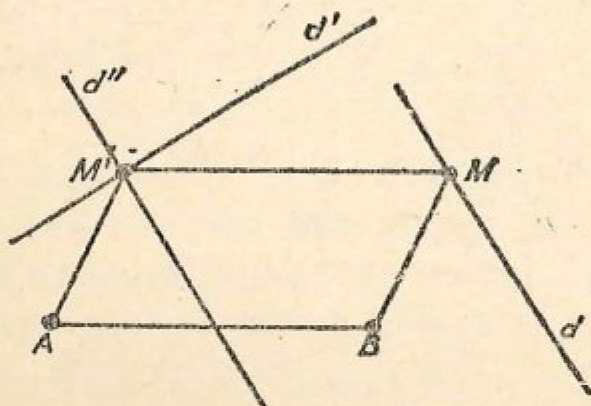


Fig. III. 8

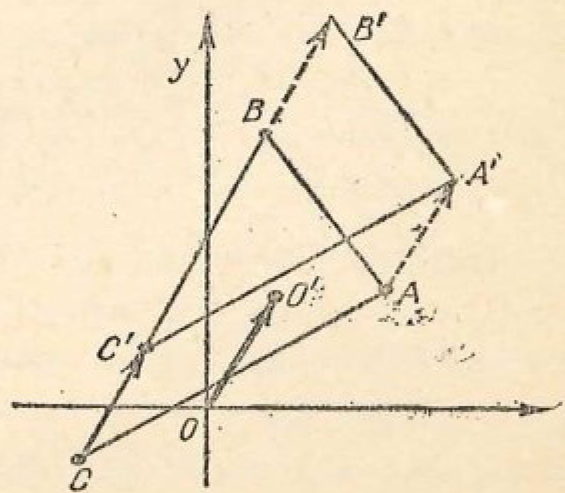


Fig. III. 9

§ 3. Rotații

Fie planul p raportat la reperul cartezian xOy, plan orientat prin fixarea sensului de rotație trigonometric drept sens pozitiv. Sensul mișcării acelor de ceasornic este sensul negativ. Admitem cunoscute noțiunile de unghi orientat și de măsură algebrică a unui asemenea unghi.

Definiție. Fie θ o măsură algebrică de unghi orientat fixat. Transformarea geometrică $\mathcal{R}: p \to p$ definită prin $\mathcal{R}(O) = O$ și pentru $M \neq O$, $\mathcal{R}(M) = M'$ astfel încît $d(O, M) = d(O, M')$, $\sphericalangle MOM' = \theta$ se numește rotație de centru O și unghi θ (fig. III. 10).

Rotația este bine definită deoarece fiecărui punct $M \in p$ i se atașează un punct și numai unul $M' \in p$ determinat de condițiile date în definiție. Originea reperului cartezian este singurul punct cu proprietatea $\mathcal{R}(O) = O$, adică este singurul *punct fix*.

Presupunem că M are coordonatele (x, y) și M' are coordonatele (x', y').

Teoremă. *Rotația $\mathcal{R}$ de centru $O(0,0)$ și unghi θ este caracterizată prin ecuațiile*

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta - y \sin\theta \\ y' = x \sin\theta + y \cos\theta, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}, \quad \theta = \text{fixat}. \end{cases}$$

Demonstrație. Urmărind figura III.10, cazul $\theta \geqslant 0$, avem $x' = \cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha \cos\theta - \sin\alpha \sin\theta$. Dar $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$. Deci $x' = x\cos\theta - y \sin\theta$. Analog, $y' = \sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha \cos\theta + \cos\alpha \sin\theta$, adică $y' = x \sin\theta + y \cos\theta$.

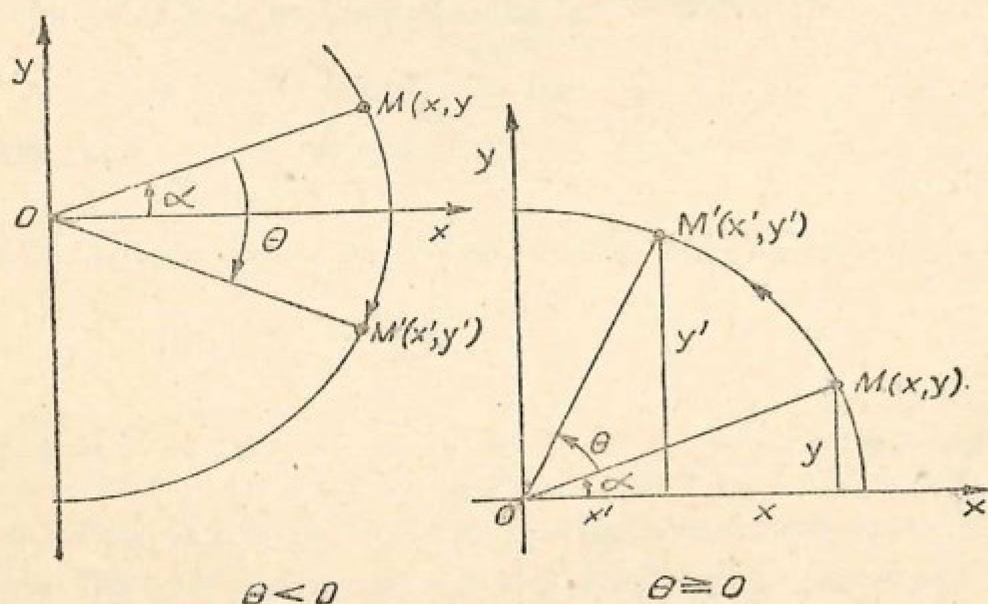


Fig. III. 10

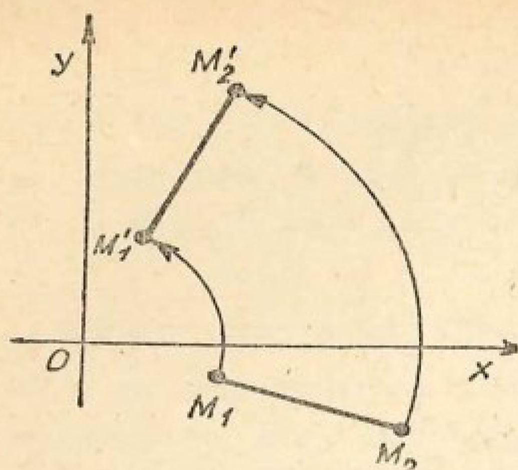


Fig. III. 11

Teoremă. 1) *Dacă $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$ sînt rotații de centru O și unghiuri θ_1 respectiv θ_2, atunci $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ este rotația de centru O și unghi $\theta_1 + \theta_2$.*

2) *Dacă $\mathcal{R}$ este rotația de centru O și unghi θ, atunci $\mathcal{R}^{-1}$ există și este rotația de centru O și unghi $-\theta$.*

Demonstrație. 1) Temă.

2) Rotația $\mathcal{R}$ de centru $O(0, 0)$ și unghi θ este caracterizată prin sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \theta \in \mathbb{R}, \ \theta = \text{fixat}. \end{cases}$$

Presupunînd $M'(x', y')$ dat și rezolvînd sistemul precedent în raport cu (x, y) găsim soluția unică

$$\begin{cases} x = x'\cos(-\theta) - y'\sin(-\theta), \\ y = x'\sin(-\theta) + y'\cos(-\theta). \end{cases}$$

Aceste ecuații caracterizează o rotație $\mathcal{S}$ de centru $O(0,0)$ și unghi $-\theta$ cu proprietatea $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = 1_p$. De aceea $\mathcal{R}$ este bijectivă și $\mathcal{S} = \mathcal{R}^{-1}$.

Definiția și teoremele precedente arată că mulțimea tuturor rotațiilor de centru O ale planului p este un grup comutativ în raport cu operația produs (*grupul rotațiilor*).

Să arătăm că rotațiile au proprietatea de a păstra distanța dintre puncte (fig. III. 11). Într-adevăr, dacă prin rotația $\mathcal{R}$ de centru O și unghi θ punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2$, au imaginile $M_i'(x_i', y_i')$, $x_i' = x_i\cos\theta - y_i\sin\theta$, $y_i' = x_i\sin\theta + y_i\cos\theta$, $i = 1,2$, atunci

$$d(M_1', M_2') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} =$$
$$= \sqrt{[(x_2 - x_1)\cos\theta - (y_2 - y_1)\sin\theta]^2 + [(x_2 - x_1)\cos\theta + (y_2 - y_1)\sin\theta]^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$
$$= d(M_1, M_2).$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului ABC, în exterior, se construiesc triunghiurile ABD și ACE astfel încît $\sphericalangle EAC = \sphericalangle DAB = 90°$ și $\sphericalangle BDA = \sphericalangle CEA$. Să se arate că mediana din A a triunghiului ABC este înălțimea în triunghiul DAE.

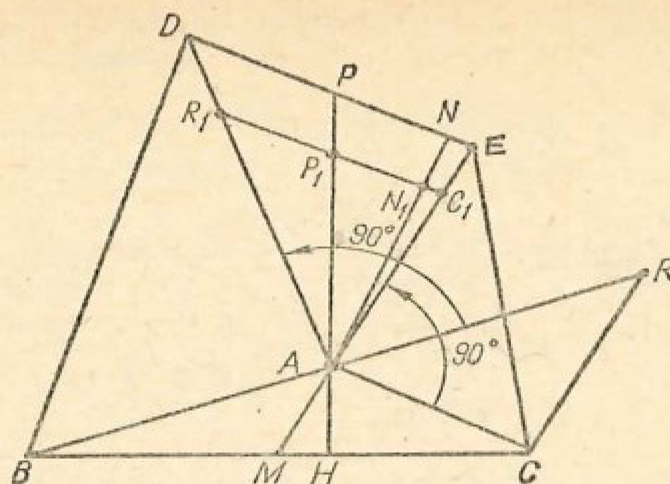


Fig. III. 12

Soluție (fig. III. 12). Fie $AH \perp BC, [MB] \equiv [MC], AH \cap DE = \{P\}, AM \cap DE = \{N\}$. Prelungim pe $[BA]$ cu un segment $[AR] \equiv [BA]$; atunci AM este linie mijlocie în triunghiul BRC, adică $AM \parallel RC$ și $d(A, M) = \frac{1}{2} d(R, C)$.

Efectuăm o rotație de 90°, cu centrul în A, a triunghiului ARC; AR devine AR_1, AC devine AC_1 și RC devine R_1C_1. Dar $ABD \sim ACE$;

$$\text{deci } \frac{d(A, C)}{d(A, B)} = \frac{d(A, E)}{d(A, D)} \text{ sau } \frac{d(A, C_1)}{d(A, R_1)} = \frac{d(A, E)}{d(A, D)}.$$

Rezultă $R_1C_1 \parallel DE$ și cum $R_1C_1 \perp RC$, $AM \parallel RC$, găsim $AM \perp DE$.

2. 1) Se dă triunghiul echilateral de vîrfuri $A(1, 2)$, $B(3, -1)$,

$$C\left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Să se determine imaginea sa prin rotația $\mathcal{R}$ de centru O și unghi $\frac{\pi}{3}$.

2) Se dă pătratul de vîrfuri $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(-1, 2)$. Să se determine imaginea sa prin rotația $\mathcal{R}$ de centru A și unghi $-\frac{\pi}{4}$.

Soluție. 1) Rotația de centru O și unghi $\pi/3$ este caracterizată prin

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Punînd $x = 1$, $y = 2$, găsim $x' = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$. Astfel imaginea lui A prin $\mathcal{R}$ este punctul $A'\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$. Analog,

$$B'\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right), \quad C'((\sqrt{3} - 1)/2, \ (5 + 3\sqrt{3})/2).$$

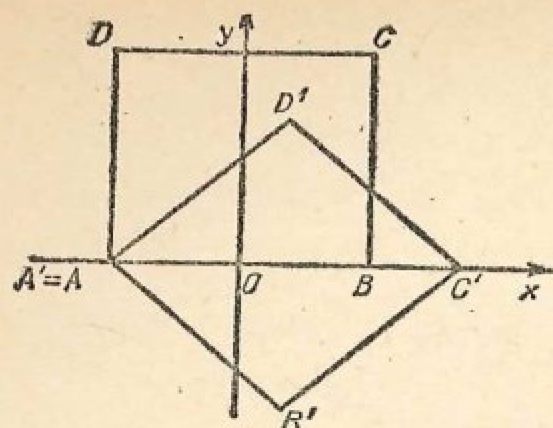


Fig. III. 13

2. (fig. III. 13). Rotația $\mathcal{R}$ de centru $A(-1, 0)$ și unghi $-\pi/4$ este caracterizată prin (de ce?)

$$\begin{cases} x' + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

Evident lui $A(-1, 0)$ îi corespunde punctul $A'(-1, 0)$. Punctului $B(1, 0)$ îi corespunde

$$B'(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2}).$$

Analog,

$$C'(2\sqrt{2} - 1, 0), \; D'(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}).$$

§ 4. Izometrii

Fie planul p raportat la reperul cartezian xOy. Rotația de centru O și unghi θ este descrisă de sistemul liniar

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

De aceea rotației $\mathcal{R}$ i se poate asocia matricea

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Matricea R are proprietatea ${}^tRR = I$, unde I este matricea unitate de ordinul doi. Astfel R este ceea ce se cheamă o *matrice ortogonală* de ordinul doi.

Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o *matrice ortogonală* cu elemente reale, adică o matrice care satisface relația ${}^tAA = I$. Ținînd seama că determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinanților și că determinantul unei matrice este egal cu determinantul transpusei, deducem $\det({}^tAA) = \det I \Rightarrow$ $\Rightarrow (\det{}^tA)(\det A) = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$. Astfel matricea ortogonală A este nesingulară, adică admite inversa A^{-1}. Dacă înmulțim relația ${}^tAA = I$ la dreapta cu A^{-1} rezultă ${}^tA = A^{-1}$. Din această egalitate, prin înmulțire la stînga cu A, rezultă $A{}^tA = I$.

Inversa unei matrice ortogonale este o matrice ortogonală. Într-adevăr, ${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = I$. Analog se arată că dacă A și B sînt matrice ortogonale (de ordinul doi), atunci și matricea produs AB este ortogonală.

Teoremă. 1) *Orice matrice ortogonală de ordinul doi cu determinantul* $+1$ *se poate scrie în forma*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2) *Orice matrice ortogonală de ordinul doi cu determinantul* -1 *se poate scrie sub forma*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Demonstrație. 1) Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală de ordinul doi. Problema se reduce la a rezolva sistemul

$$a^2 + c^2 = 1,\ ab + cd = 0,\ b^2 + d^2 = 1,\ ad - bc = 1.$$

Se observă că dacă punem $a = \cos\theta, c = \sin\theta, \theta \in \mathbf{R}$, atunci prima ecuație este identic satisfăcută. Analog, ecuația a treia admite familia de soluții $b = \cos\varphi$, $d = \sin\varphi$, $\varphi \in \mathbf{R}$. Se impune ca acestea să verifice ecuația a doua și ecuația a patra, adică

$$\cos(\theta - \varphi) = 0,\quad \sin(\theta - \varphi) = -1.$$

Rezultă $\varphi = \theta - \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$ și deci $b = -\sin\theta$, $d = \cos\theta$.

2) Temă.

Observațiile precedente sugerează introducerea transformărilor geometrice determinate analitic de o matrice ortogonală, transformări care conțin rotațiile de centru O ca un caz particular.

Definiție. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **o matrice ortogonală. Transformarea geometrică care asociază punctului** $M(x, y)$ **punctul** $M'(x', y')$ **definit prin**

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

se numește transformare ortogonală.

Avînd în vedere observațiile făcute pentru matricele ortogonale de ordinul doi rezultă:

1) *orice transformare ortogonală admite o inversă care este tot transformare ortogonală,*

2) *produsul a două transformări ortogonale este o transformare ortogonală,*

3) *dacă* det $A = +1$, *atunci transformarea ortogonală corespunzătoare este o rotație de centru O,*

4) *dacă* det $A = -1$, *atunci transformarea ortogonală corespunzătoare este o rotație de centru O și o simetrie de axă Ox sau Oy.*

Aceste observații arată printre altele că mulțimea tuturor transformărilor ortogonale ale planului p este un grup în raport cu operația produs *(grupul transformărilor ortogonale)*.

Ca și în cazul rotației un calcul analitic simplu arată că o transformare ortogonală păstrează distanța dintre puncte.

Pornind de la modelul transformărilor ortogonale și al translațiilor introducem transformările geometrice care poartă numele de *izometrii*.

Definiție. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală și (h, k) o pereche de numere date. Transformarea geometrică care asociază punctului $M(x, y)$ punctul $M'(x', y')$ definit prin

$$\begin{cases} x' = ax + by + h, \\ y' = cx + dy + k \end{cases}$$

se numește izometrie.

Alternativ izometria este produsul dintre o transformare ortogonală de matrice A și o translație de vector $h\vec{i} + k\vec{j}$. În cazul det $A = +1$ izometria se numește *deplasare (rototranslație)*, iar în cazul det $A = -1$ izometria se numește *antideplasare* (rotație, simetrie și translație).

Două repere carteziene determină unic o izometrie. Mai precis fiind date două repere carteziene $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, $\overrightarrow{OA} \in \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} \in \vec{j}$ și $\{O'; \vec{i}', \vec{j}'\}$, $\overrightarrow{O'A'} \in \vec{i}'$, $\overrightarrow{O'B'} \in \vec{j}'$ există o singură izometrie $\mathcal{J} : p \to p$ astfel încît $\mathcal{J}(O) = O'$, $\mathcal{J}(A) = A'$, $\mathcal{J}(B) = B'$. Această afirmație se probează destul de ușor dacă ținem seama de expresiile canonice ale matricelor ortogonale de ordinul doi.

De asemenea se constată că orice izometrie este bijectivă, inversa fiind tot o izometrie, iar produsul a două izometrii este tot o izometrie. Astfel, izometriile formează grup în raport cu operația produs *(grupul izometriilor)*.

Teoremă. 1) *Izometriile păstrează distanța dintre puncte.*

2) *Izometriile păstrează dreptele.*

Demonstrație. 1) Orice izometrie $\mathcal{J}$ se scrie în forma $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ unde $\mathcal{T}$ este o translație și $\mathcal{S}$ o transformare ortogonală. Rezultă $d(\mathcal{J}(M), \mathcal{J}(N)) = d(\mathcal{T}(\mathcal{S}(M)), \mathcal{T}(\mathcal{S}(N)) = d(\mathcal{S}(M), \mathcal{S}(N)) = d(M, N), \forall M, N \in p$ (fig. III. 14).

Notă. Se poate arăta că orice transformare geometrică a lui p care păstrează distanța dintre puncte este o izometrie.

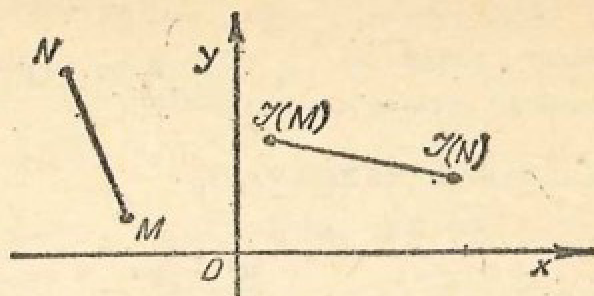


Fig. III. 14

2) Fie dreapta $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și izometria de ecuații $x' = ax + by + h$, $y' = cx + dy + k$. Pentru simplificarea raționamentelor presupunem $ad - bc = 1$. Deoarece

$$x = \begin{vmatrix} x' - h & b \\ y' - k & d \end{vmatrix}, \qquad y = \begin{vmatrix} a & x' - h \\ c & y' - k \end{vmatrix}$$

imaginea $\mathcal{J}$ (d_1) are ecuația

$$a_1 \begin{vmatrix} x' - h & b \\ y' - k & d \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a & x' - h \\ c & y' - k \end{vmatrix} + c_1 = 0.$$

Aceasta este o ecuație de gradul întîi în x' și y' pentru care $(a_1d - b_1c)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 = a_1^2(b^2 + d^2) + b_1^2(a^2 + c^2) - 2a_1b_1(ab + cd) = a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, adică coeficienții lui x', y' nu se anulează simultan. Astfel teorema este justificată.

Izometriile păstrează distanța și dreptele. Deci ele păstrează toate noțiunile definite cu ajutorul distanței și dreptelor.

Consecință. Izometriile păstrează relația „între", segmentele, semidreptele, unghiurile, triunghiurile și congruența acestor entități.

Definiție. Două submulțimi, X, Y de puncte din plan se numesc congruente dacă există o izometrie $\mathcal{J} : p \to p$ astfel încît $\mathcal{J}(X) = Y$ (fig. III.15, *a* — translație, *b* — rotație, *c* — simetrie).

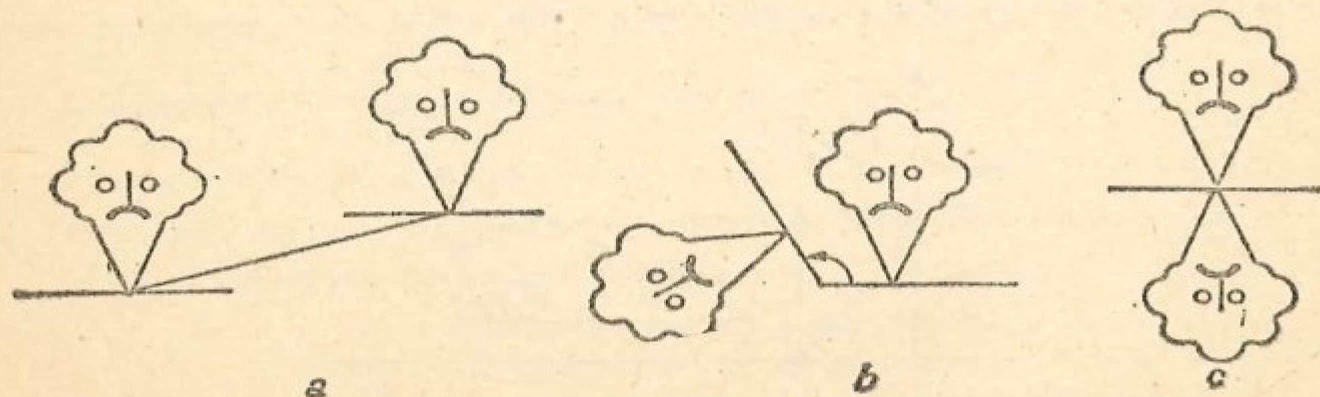


Fig. III. 15

Congruența este o relație de echivalență pe mulțimea submulțimilor (figurilor) planului p. Submulțimile (figurile) din aceeași clasă de echivalență poartă aceeași denumire.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctele

$$A\left(\frac{a^2-1}{a^2-2a+1},\ \frac{a^4+2a^3+a^2}{a^4-a^2}\right),\ B\left(1,\ \frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-a}\right),\ C\left(-1,\ \frac{a-1}{3a-1}\right),$$

$$D\left(\frac{a+1}{a-1},\ \frac{a+1}{a-1}\right),\ E(1,\ 1),\ F\left(-1,\ \frac{a}{3a-1}+\frac{1}{1-3a}\right),$$

unde a este un parametru real. Să se determine condițiile de existență simultană a triunghiurilor ABC, DEF și să se verifice că în aceste condiții $ABC = DEF$.

Soluție. Existența expresiilor raționale impune $a \neq 1$, $a \neq 0$. $a \neq \frac{1}{3}$. În aceste condiții se observă că $A = D$, $B = E$ și $C = F$, avînd respectiv coordonatele $\left(\frac{a+1}{a-1},\ \frac{a+1}{a-1}\right)$, $(1,\ 1)$, $\left(-1,\ \frac{a-1}{3a-1}\right)$. Impunem și condiția ca A, B, C să nu fie coliniare

$$\begin{vmatrix} \frac{a+1}{a-1} & \frac{a+1}{a-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{a-1}{3a-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Rezultă $a \neq \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$.

2. Să se verifice că triunghiurile MNL și $M'N'L'$ de vîrfuri $M(7,\ 1)$, $N(7,\ 4)$, $L(3,\ 1)$, $M'(-2/5,\ 16/5)$, $N'(2,\ 5)$, $L'(2,\ 0)$ sînt congruente și să se determine izometria $\mathcal{J}$ cu proprietatea $\mathcal{J}\ (MNL) = M'N'L'$.

Soluție (fig. III. 16). Triunghiurile dreptunghice MNL și $M'N'L'$ sînt congruente deoarece au laturile congruente (de lungimi respectiv egale). Urmărind orientarea indicată de săgeți deducem că $M'N'L'$ se obține din MNL printr-o antideplasare, adică o izometrie de tipul

$$\begin{cases} x' = x \cos\ \theta + y \sin\ \theta + h, \\ y' = x \sin\ \theta - y \cos\ \theta + k. \end{cases}$$

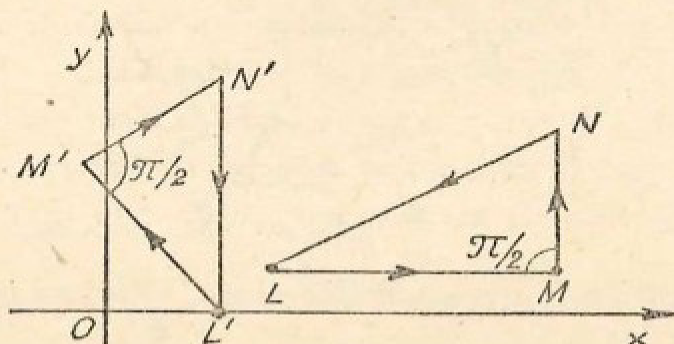


Fig. III. 16

coeficienţii $\cos\theta$, $\sin\theta$, h şi k sînt determinaţi de sistemul

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{5} = 7\cos\theta + \sin\theta + h, \\ \dfrac{16}{5} = 7\sin\theta - \cos\theta + k, \\ 2 = 7\cos\theta + 4\sin\theta + h, \\ 5 = 7\sin\theta - 4\cos\theta + k, \\ 2 = 3\cos\theta + \sin\theta + h, \\ 0 = 3\sin\theta - \cos\theta + k. \end{cases}$$

Rezultă $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$, $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$, $h = 3$, $k = -3$.

§ 5. Probleme propuse

1. Triunghiul $A'B'C'$ este obţinut din triunghiul ABC printr-o translaţie. Să se arate că medianele din puncte corespondente ale celor două triunghiuri sînt paralele sau coliniare.

Indicaţie. Imaginea unei drepte d printr-o translaţie este o dreaptă paralelă sau egală cu d.

2. Fie cercurile C_1, C_2 şi segmentul $[AB]$. Să se construiască un segment paralel şi congruent cu $[AB]$ ale cărui extremităţi să fie respectiv pe cercurile C_1 şi C_2. Discuţie.

Indicaţie. Se utilizează translaţia $\mathcal{T}$ de vector $\overline{AB}$.

3. În planul raportat la reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1, 2)$.

1) Să se determine ecuaţiile translaţiei $\mathcal{T}$ de vector $\overline{OA}$.

2) Care este imaginea dreptei d: $x + y + 1 = 0$ prin $\mathcal{T}$.

3) Să se găsească dreapta h cu proprietatea $\mathcal{T}(h)$: $2x' - 3y' + 1 = 0$.

4. Fie h, k, l trei drepte paralele. Să se construiască un triunghi echilateral ABC ale cărui vîrfuri să fie situate pe cele trei drepte.

Indicaţie. Se fixează punctul A pe una din drepte şi se utilizează rotaţia de centru A şi unghi $60°$ sau $-60°$. Rezultă două soluţii.

5. Să se înscrie un pătrat într-un paralelogram.

Indicaţie. Dacă există un pătrat înscris într-un paralelogram, atunci centrul O al paralelogramului coincide cu centrul pătratului. Se utilizează rotaţia de centru O şi unghi $\dfrac{\pi}{2}$.

6. Se consideră rotaţia $\mathcal{R}$ de centru O şi unghi $\dfrac{\pi}{3}$,

1) Care este imaginea dreptei d: $x - y + 1 = 0$ prin $\mathcal{R}$?

2) Să se determine o dreaptă h cu proprietatea $\mathcal{R}(h)$: $x - 4y + 1 = 0$.

7. Să se determine punctele fixe ale izometriei de ecuaţii

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + 1, \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta - 1 \end{cases}$$

Indicaţie. Se pune $x' = x$, $y' = y$ şi se rezolvă sistemul liniar, obţinut.

8. Fie $\mathcal{S} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$, unde $\mathcal{T}$ este translaţia de vector $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j}$, iar $\mathcal{R}$ este rotaţia de matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Se dă $A(3, 2)$. Să se găsească $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{S}^{-1}(A)$, $(\mathcal{R} \circ \mathcal{T})(A)$.

Indicaţie. $\mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ are ecuaţiile: $x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1$, $y' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 1$, iar $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}$ are ecuaţiile: $x'' = \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{y-1}{\sqrt{2}}$, $y'' = \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{y-1}{\sqrt{2}}$.

9. Axele de coordonate Ox şi Oy se rotesc cu unghiul $\frac{\pi}{3}$ şi noul reper $x'Oy'$ se consideră invers orientat faţă de xOy. Ştiind că un punct A are coordonatele $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ în reperul $x'Oy'$, să se găsească coordonatele lui A faţă de reperul xOy.

Indicaţie. Rotaţia de unghi θ, a reperului cartezian xOy, este caracterizată prin $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$, $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$ unde $M\binom{x,\ y}{(x',\ y')}$. Problema impune rotaţia reperului urmată de o simetrie în raport cu Oy' sau în raport cu Ox'. Obţinem

$$\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) \text{ sau } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3, \sqrt{3} + \frac{3}{2}\right).$$

Capitolul IV

CONICE

§ 1. Cercul

Fie $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ reperul cartezian în plan şi $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ două puncte. Reamintim expresia distanţei

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat şi r un număr real strict pozitiv fixat. *Cercul C de centru M_0 şi rază r* este mulţimea punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea $d(M_0, M) = r$ (fig. IV. 1).

T e o r e m ă. *Punctul $M(x, y)$ aparţine cercului C de centru M_0 (x_0, y_0) şi rază r dacă şi numai dacă*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Demonstraţie. $M \in C \Leftrightarrow d(M_0, M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - x_0^2) + (y - y_0)^2 = r^2$.

Astfel $C = \{M(x,y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ sau mai scurt C: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numeşte *ecuaţia carteziană implicită a cercului C de centru (x_0, y_0) şi rază r*. Această ecuaţie este echivalentă cu două *ecuaţii parametrice* în R^2 (fig. IV. 2),

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t, \ t \in [0, 2\pi), \ t = \text{parametru}, \end{cases}$$

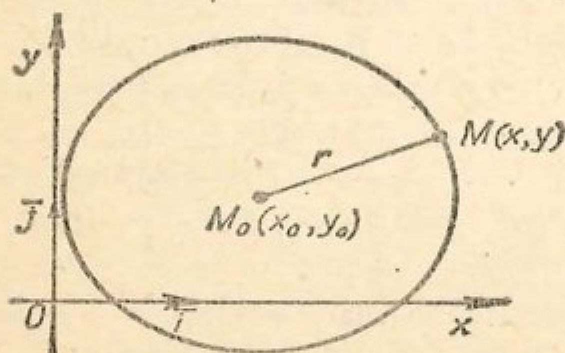


Fig. IV. 1

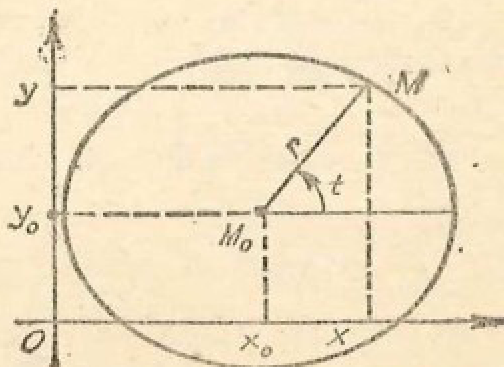


Fig. IV. 2

sau cu o ecuație

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + r(\cos t\, \bar{i} + \sin t\, \bar{j}),\ t \in [0, 2\pi)$$

în V numită *ecuația vectorială* a cercului.

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x și y, termenul de gradul doi fiind $x^2 + y^2$. Aceasta sugerează să cercetăm mulțimea

$$\Gamma:\ x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Deoarece ecuația lui Γ se transcrie

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

rezultă:

1) dacă $a^2 + b^2 - c > 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în $x_0 = -a$, $y_0 = -b$ și de rază $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$;

2) dacă $a^2 + b^2 - c = 0$, atunci $\Gamma = \{(-a,\ -b)\}$;

3) dacă $a^2 + b^2 - c < 0$, atunci $\Gamma = \emptyset$.

Ecuația

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,\ \ a^2 + b^2 - c > 0,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

se numește *ecuația carteziană generală a cercului*. Evident această ecuație este echivalentă cu

$$d(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0,\ d \neq 0,\ a_1^2 + b_1^2 - dc_1 > 0.$$

Fie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$, unde (x_0, y_0) este un punct fixat, iar $r > 0$ este tot fixat. Definim mulțimile (fig. IV. 3) $\text{int}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $C = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$. Evident $\text{int}(C) \cap \text{ext}(C) = \emptyset$, $\text{int}(C) \cup C \cup \text{ext}(C) = p$.

Deci un cerc C din plan are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte: *interiorul* lui C notat int (C) și *exteriorul* lui C notat ext (C).

Teoremă. 1) *Mulțimile* int (C) și int $(C) \cup C$ *sînt convexe.*

2) $\forall M_1 \in \text{int}(C)$, $\forall M_2 \in \text{ext}\,(C)$, *segmentul* $[M_1M_2]$ *taie pe* C.

Demonstrație. Fără a scădea generalitatea putem presupune $x_0 = y_0 = 0$. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2$, două puncte din plan. Segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin ecuațiile parametrice $x = (1 - t)\, x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$.

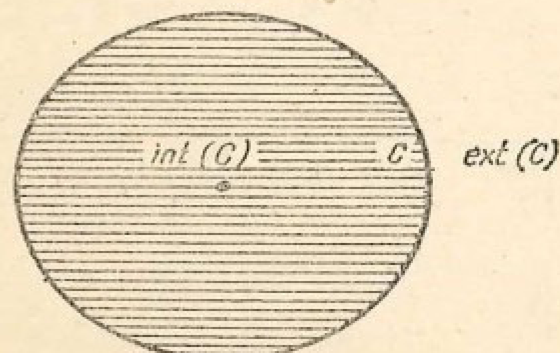


Fig. IV. 3

Dacă $M_1, M_2 \in \text{int}(C)$, adică $f(x_i, y_i) = x_i^2 + y_i^2 - r^2 < 0$, $i = 1,2$, atunci

$$f(x, y) = f((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2)^2 + ((1 - t)y_1 + ty_2)^2 - r^2 = (1 - t)^2x_1^2 + 2(1 - t)tx_1x_2 + t^2x_2^2 + (1 - t)^2y_1^2 + 2(1 - t)ty_1y_2 + t^2y_2^2 - r^2 \leqslant^* (1 - t)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) + t(x_2^2 + y_2^2 - r^2) = (1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2) < 0, \forall t \in [0, 1].$$

---

* t^2 se majorează cu t, coeficientul său fiind pozitiv.

Cu alte cuvinte $[M_1M_2] \subset \text{int}(C)$.

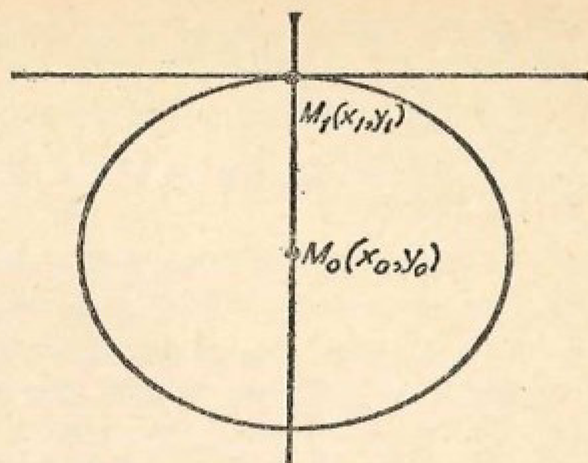


Fig. IV. 4

2) Fie $M_1 \in \text{int}(C)$, adică $f(x_1, y_1) < 0$ și $M_2 \in \text{ext}(C)$, adică $f(x_2, y_2) > 0$. Rezultă funcția continuă $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) = ((1-t)x_1 + tx_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2)^2 - r^2$, cu proprietățile $\varphi(0) = f(x_1, y_1) < 0$ și $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$. De aceea există o valoare $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît $0 = \varphi(t_0) = ((1 - t_0)x_1 + t_0x_2)^2 + ((1 - t_0)y_1 + t_0y_2)^2 - r^2$ și deci $M_0((1 - t_0)x_1 + t_0x_2, (1 - t_0)y_1 + t_0y_2) \in C$.

Fie cercul $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ și $M_1(x_1, y_1) \in C$. Dreapta determinată de punctul M_1 și de vectorul normal $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0)\bar{i} + (y_1 - y_0)\bar{j}$ este tangentă (fig. IV.4) la cerc în punctul M_1. Ecuația carteziană implicită a acestei drepte este

$$(x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = 0$$

sau echivalent

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$$

(dedublata ecuației cercului în punctul $M_1(x_1, y_1)$). Dreapta determinată de punctul M_1 și de vectorul director $\overline{M_0M_1}$ este *normala* (fig. IV. 4) la cerc în punctul M_1. Ecuația normalei este

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0}.$$

Observație. Prin *dedublări* înțelegem substituirile $x^2 \to xx_1$, $y^2 \to yy_1$, $xy \to \frac{1}{2}(xy_1 + x_1y)$, $x \to \frac{1}{2}(x + x_1)$, $y \to \frac{1}{2}(y + y_1)$. Prin *dedublata ecuației de gradul doi $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ în punctul $M_1(x_1, y_1)$* înțelegem ecuația de gradul întîi $a_{11}x_1x + a_{12}(y_1x + x_1y) + a_{22}y_1y + a_{10}(x + x_1) + a_{20}(y + y_1) + a_{00} = 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se găsească ecuația carteziană a cercului cu centru în $M_0(1, 1)$ și tangent dreptei d: $3x + 4y + 8 = 0$. Apoi să se scrie ecuațiile parametrice și ecuația vectorială ale aceluiași cerc.

Soluție. Notăm cu C cercul a cărui ecuație se caută. Raza r a acestui cerc este distanța de la M_0 la dreapta d. Deci,

$$r = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3. \text{ Astfel } C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2.$$

Ecuația carteziană găsită este echivalentă cu ecuațiile parametrice $x = 1 + 3\cos t$, $y = 1 + 3\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, din care se obține ecuația vectorială $\bar{r} = \bar{i} + \bar{j} + 3(\cos t\bar{i} + \sin t\bar{j})$, $t \in [0, 2\pi)$.

2. 1) Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ reprezintă un cerc C, punîndu-se în evidenţă centrul $M_0(x_0, y_0)$ şi raza r.

2) Să se scrie ecuaţia carteziană a tangentei la C în punctul $A(2,0)$.

3) Să se găsească ecuaţiile carteziene ale tangentelor duse prin $D(8,7)$ la cercul C.

Soluţie. 1) Ecuaţia dată se transcrie $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ şi deci ea reprezintă un cerc cu centrul în $M_0(3,2)$ şi de rază $r = \sqrt{5}$.

2) Punctul A aparţine lui C, adică coordonatele sale verifică ecuaţia lui C. Ecuaţia carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$ se poate obţine utilizînd dedublata ecuaţiei lui C, $(x_1 - 3)\cdot(x - 3) + (y_1 - 2)(y - 2) = 5$. Rezultă $-(x - 3) - 2(y - 2) = 5$ sau $x + 2y - 2 = 0$.

3) Fasciculul de drepte cu vîrful $D(8, 7)$ are ecuaţia $r(x - 8) + s(y - 7) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Selectăm din acest fascicul dreptele care se găsesc la distanţa $r = \sqrt{5}$ faţă de centrul $M_0(3, 2)$. Pentru aceasta se impune condiţia

$$\sqrt{5} = \frac{|r(3 - 8) + s(2 - 7)|}{\sqrt{r^2 + s^2}},$$

care este echivalentă cu $r^2 + s^2 = 5(r + s)^2$. Rezultă $r = -\frac{1}{2}s$, $r = -2s$ şi deci $x - 2y + 6 = 0$ respectiv $2x - y - 9 = 0$ sînt ecuaţiile căutate.

3. Să se arate că cercul $C : x^2 + y^2 = 1$ nu este graficul nici unei funcţii, dar este reuniunea graficelor a două funcţii.

Soluţie. Se ştie că graficul unei funcţii este interesectat de o dreaptă paralelă cu Oy cel mult într-un punct. Se observă însă că axa Oy intersectează cercul C în două puncte de coordonate $(0, -1)$, $(0, +1)$. De aceea C nu este graficul nici unei funcţii.

Semicercul superior $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ este graficul funcţiei $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, iar semicercul inferior $x^2 + y^2 = 1$, $y < 0$ este graficul funcţiei $g:(-1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Cercul C este reuniunea acestor două grafice.

4. Pe un cerc C de diametru dat $[AB]$, de lungime $4a$, $a > 0$ şi centru O, se consideră un punct mobil M.

1) Să se scrie ecuaţiile cercurilor circumscrise triunghiurilor AOM şi BOM.

2) Să se arate că produsul distanţelor de la centrele P şi Q ale acestor cercuri la dreapta AB este constant şi că dreptele AP şi BQ sînt perpendiculare.

3) Să se găsească locul geometric al punctului de intersecţie al dreptelor AP şi BQ.

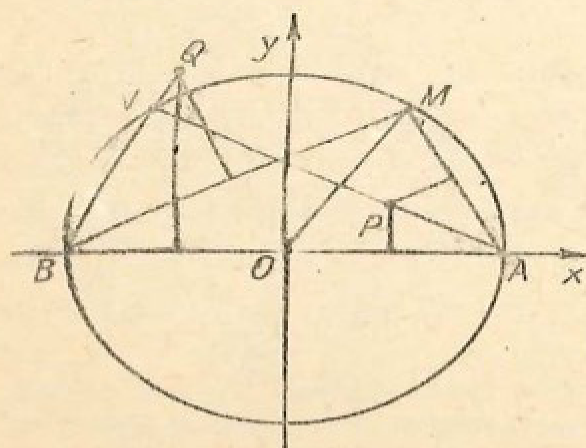


Fig. IV. 5.

Soluţie. Fixăm mai întîi reperul cartezian ca în figura IV. 5, considerînd dreapta AB ca Ox şi mediatoarea segmentului AB ca Oy. Rezultă $A(2a, 0)$, $B(-2a, 0)$ şi $C : x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$. Fie $M(\alpha, \beta)$; $M \in C \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 4a^2 = 0 (1)$. Cercul circumscris triunghiului AOM are centrul P situat pe mediatoarea segmentului $[OA]$. Fie $P(a, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; atunci raza este $r = \sqrt{a^2 + \lambda^2}$, iar ecuaţia este $x^2 + y^2 - 2ax - 2\lambda y = 0$ cu condiţia $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - 2\lambda\beta = 0$ (2).

Analog găsim ecuația cercului circumscris triunghiului BOM, cu centrul $O(-a, \mu)$ $\mu \in \mathbb{R}$ și anume $x^2 + y^2 + 2ax - 2\mu y = 0$ cu condiția $\alpha^2 + \beta^2 + 2a\alpha - 2\mu\beta = 0$ (4).

2) Din relațiile (1), (2), (3) deducem

$$d(P, P') = \left|\frac{a(2a - \alpha)}{\beta}\right|, \ d(Q, Q') = \left|\frac{a(2a + \alpha)}{\beta}\right|, \ \beta = 0$$

$$d(P, P') \cdot d(Q, Q') = \frac{a^2\beta^2}{\beta^2} = a^2 = \text{const.}$$

Panta dreptei AP este $m_1 = -\dfrac{\lambda}{a}$, iar a dreptei BQ este $m_2 = \dfrac{\mu}{a}$. Deoarece $m_1 m_2 = -\dfrac{\lambda\mu}{a^2} = -\dfrac{a^2}{a^2} = -1$, dreptele AP și BQ sînt perpendiculare.

Observație. Produsul $\lambda\mu$ este pozitiv, oricare ar fi poziția punctului M pe cercul C.

3) Fie $\{L\} = AP \cap BQ$. Locul geometric descris de punctul L este chiar cercul $C: x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$.

5. Să se găsească locul geometric descris de punctul de intersecție al dreptelor $d: x \cos \alpha + y = 1$, $d': x - y \cos \alpha = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluție. Mai întîi subliniem faptul că existența lui α, echivalentă cu $|\cos \alpha| \leqslant 1$, impune $|1 - y| \leqslant |x|$, $|x - 1| \leqslant |y|$. Punctele din plan care satisfac acestor condiții aparțin regiunii nehașurate din figura IV.6. Evident locul geometric căutat aparține acestei regiuni.

Vom elimina parametrul α între ecuațiile lui d și d' printr-un procedeu care ține seama de faptul că aceste drepte nu trec prin origine:

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y = 1 \\ x - y \cos \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \cos \alpha + y^2 = y \\ x^2 - xy \cos \alpha = x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = x + y.$$

Rezultă că locul geometric căutat este descris de relațiile $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, $|1 - y| \leqslant |x|$, $|x - 1| \leqslant |y|$, adică el este semicercul $\widehat{AMB}$ (fig. IV. 6) din cercul cu centrul în $C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ și de rază $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Să se rezolve inecuația

$$\sqrt{3}\cos \alpha + 3 \sin \alpha - \sqrt{3} > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Notînd $\cos \alpha = x$ și $\sin \alpha = y$, inecuația dată în $\mathbb{R}$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

în $\mathbb{R}^2$.

Ecuația $\sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} = 0$ reprezintă o dreaptă d, iar ecuația $x^2 + y^2 - 1 = 0$ un

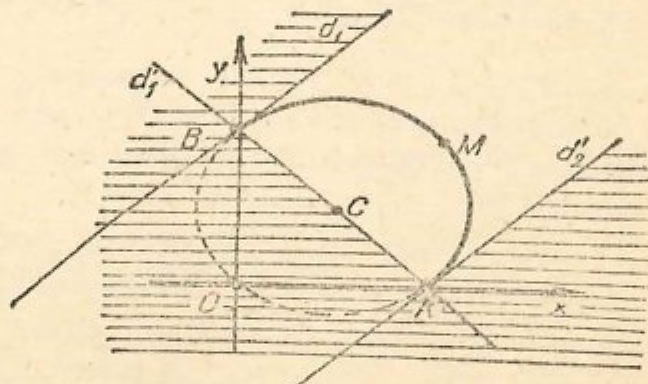


Fig. IV. 6

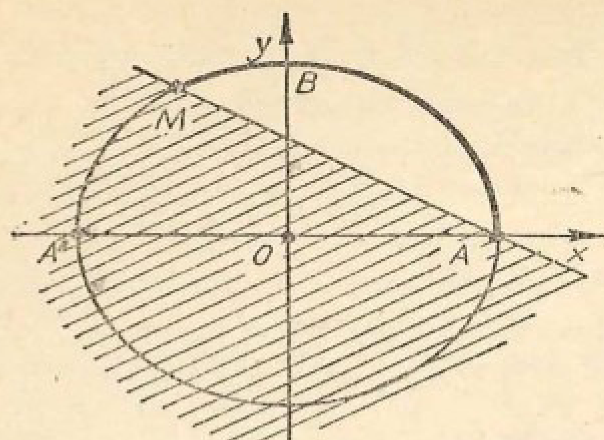


Fig. IV. 7

cerc C (fig. IV. 7). Calculăm coordonatele punctelor A și M, unde $\{A, M\} = d \cup C$. Rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

obținem soluțiile $(1,0)$ și $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Fie $A(1, 0)$ și $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Inecuația $\sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0$ este verificată de punctele din semiplanul $p^+ = \{N(x, y) \mid \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0\}$, (nehașurat în figură).

Mulțimea soluțiilor sistemului este arcul deschis $\overset{\frown}{ABM}$, intersecția dintre p^+ și C. Pe de altă parte avem

$$A(1, 0) \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De aceea mulțimea soluțiilor inecuației din enunțul problemei este reuniunea intervalelor

$$\left(2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

§ 2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv și F', F două puncte fixate din plan astfel încît $d(F', F) = 2c$ (fig. IV.8).

Definiție. Fie $a > c$. Mulțimea E a punctelor M cu proprietatea

$$d(M, F') + d(M, F) = 2a$$

se numește elipsă.

Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a. Punctele F' și F se numesc *focarele elipsei*, dreapta $F'F$ se numește *axa focală*, distanța $d(F', F) = 2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *razele focale* ale punctului M.

Elipsa nu este o mulțime vidă deoarece cercul cu centrul în F și de rază a taie mediatoarea segmentului $[F'F]$ în două puncte B' și B care aparțin lui E; de exemplu, $d(B, F) + d(B, F') = 2d(B, F) = 2a$.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea $B'B$ a segmentului $[F'F]$ sînt *axe de simetrie* pentru E. Fie $F'F \cap B'B = \{O\}$. Punctul O este *centru de simetrie*. Fixăm

reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$, $\bar{i} = \dfrac{\overline{OF}}{\|\overline{OF}\|}$, $\bar{j} = \dfrac{\overline{OB}}{\|\overline{OB}\|}$ ca în figura IV.8. Rezultă

$$F'(-c,\ 0),\ F(c,\ 0),$$

$$B'(0,\ -\sqrt{a^2 - c^2}),\ B(0,\ \sqrt{a^2 - c^2}).$$

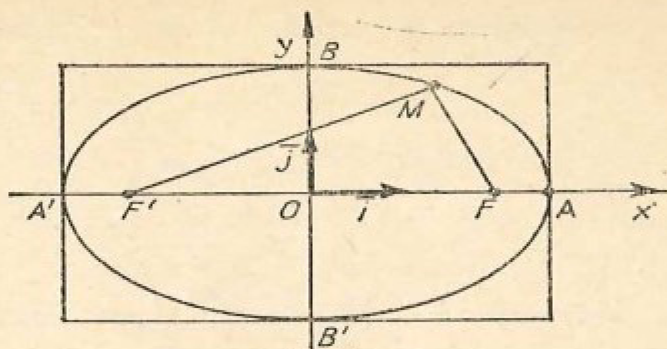


Fig. IV. 8

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține elipsei E dacă și numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstrație. Pentru orice punct $M(x, y)$ din plan notăm $d(M, F') = \rho'$, $d(M, F) = \rho$. Avem

$$\begin{cases} \rho'^2 = (x + c)^2 + y^2 \\ \rho^2 = (x - c)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx.$$

Deci

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' + \rho = 2a \\ \rho',\ \rho \in [a - c,\ a + c] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = a + \dfrac{cx}{a} \\ \rho = a - \dfrac{cx}{a} \end{cases},\ x \in [-a,\ a].$$

Astfel

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{cx}{a}\right)^2 \\ (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{cx}{a}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Notînd $b^2 = a^2 - c^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel $E = \left\{ M(x,\ y) \,\middle|\, (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ sau mai scurt $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a elipsei. Ea este echivalentă cu ecuațiile parametrice în $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t,\ \ t \in [0,\ 2\pi),\ \ t = \text{parametru}, \end{cases}$$

sau cu o ecuație

$$\bar{r} = a \cos t\ \bar{i} + b \sin t\ \bar{j},\ t \in [0,\ 2\pi)$$

în V numită *ecuația vectorială* a elipsei.

Considerăm elipsa E de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}, \; x \in [-a, a].$$

Ecuația $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \geqslant 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \leqslant 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziene explicite*.

Axele de coordonate taie elipsa în punctele $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ care se numesc *vîrfurile elipsei*. Segmentele $[A'A]$, $[B'B]$ sau distanțele $d(A', A) = 2a$, $d(B', B) = 2b$ se numesc respectiv *axa mare* și *axa mică* a elipsei. Jumătățile a și b se numesc *semiaxe*.

Dacă notăm cu E_1 și E_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \; x \to -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

definite respectiv pe $(-a, a)$, atunci se observă că

$$E = E_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup E_2$$

și deci elipsa are alura din figura IV. 8.

Luăm $M_0(x_0, y_0) \in E_1$. Tangenta în M_0 la E_1 are ecuația $y - y_0 = y_0(x - x_0)$, $x_0 \in (-a, a)$, $y_0 > 0$, unde $y_0 = -\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$, adică $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, $x_0 \in (-a, a)$, $y_0 > 0$. Analog, dacă $M_0(x_0, y_0) \in E_2$, pentru tangenta la E_2 în M_0 găsim ecuația $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, $x_0 \in (-a, a)$, $y_0 < 0$. Pe de altă parte, dreapta de ecuație $x = -a$ este tangentă la E în vîrful $(-a, 0)$, iar dreapta de ecuație $x = a$ este tangentă la E în vîrful $(a, 0)$. Ecuațiile

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0), \; y_0 \neq 0; \; x = -a; \; x = a$$

sînt cazuri particulare ale ecuației

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{1}$$

(*dedublata ecuației elipsei în punctul* $M_0(x_0, y_0)$). În concluzie, elipsa E admite în fiecare punct al său $M_0(x_0, y_0)$ o tangentă de ecuație (1). Dreapta care trece

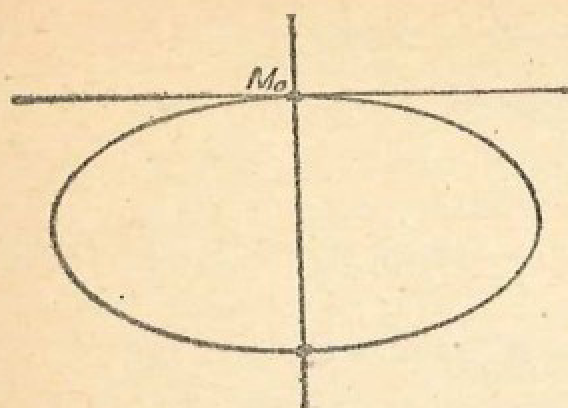


Fig. IV. 9



Fig. IV. 10

prin M_0 şi este perpendiculară pe tangentă se numeşte *normala elipsei* în punctul M_0 (fig. IV. 9).

T e m ă. Să se verifice că tangenta şi normala la elipsă în punctul M_0 sînt bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele $F'M_0$ şi FM_0.

O elipsă are proprietatea că separă planul în două submulţimi disjuncte (fig. IV.10): interiorul lui E notat int(E) şi exteriorul lui E notat ext(E). Utilizînd funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, avem

$\text{int}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $E = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$,
$\text{ext}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $\text{int}(E) \cap \text{ext}(E) = \emptyset$, $\text{int}(E) \cup E \cup \text{ext}(E) = p$. Mai mult, mulţimile int(E) şi int (E) $\cup$ E sînt convexe şi conţin centrul O şi focarele F', F.

Construcţia elipsei prin puncte (fig. IV. 11). Presupunem că se dau axa mare $[A'A]$ de lungime $2a$ şi axa mică $[B'B]$ de lungime $2b$.

1) Fixăm un punct O al planului drept mijlocul segmentelor perpendiculare $[A'A]$ şi $[B'B]$.

2) Se ia în compas distanţa a şi cu centrul în B se descrie un arc de cerc care taie pe $[A'A]$ în focarele F' şi F.

3) Se consideră un număr de puncte 1, 2, 3, ...pe axa mare.

4) Se ia în compas distanţa de la A' la 1, apoi cu centrul în F' se trasează arce de cerc deasupra şi dedesubtul axei mari.

5) Se ia în compas distanţa de la A la 1; apoi cu centrul în F se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite la 4). Astfel se obţin două puncte ale elipsei de pe jumătatea din dreapta.

6) Se repetă paşii 4), şi 5) schimbînd pe F' cu F şi astfel se obţin două puncte ale elipsei situate pe jumătatea din stînga.

7) Se repetă paşii 4), 5), 6) folosind distanţele de la A' la 2, de la A la 2,... pînă cînd se precizează un număr suficient de puncte pentru a construi elipsa.

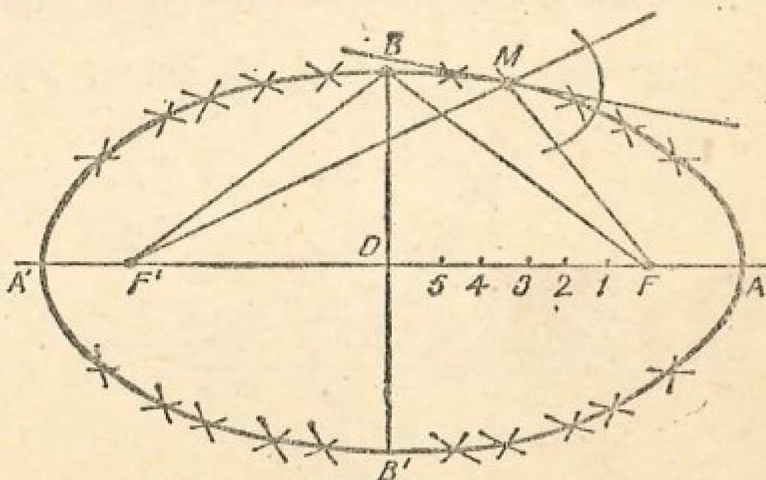


Fig. IV. 11

Punctul M a fost construit folosind distanțele de la A' la 4 și de la A la 4.

Desigur trebuie să ținem seama de faptul că elipsa nu este „ascuțită" în vecinătatea vîrfurilor iar tangenta în punctul M al elipsei este bisectoarea „exterioară" a unghiurilor dreptelor MF' și MF.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră punctele variabile $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$, astfel încît $d(A, B) = 6$.

Să se găsească locul geometric al punctului M care împarte segmentul $\overrightarrow{AB}$ în raportul $\frac{1}{2}$, punîndu-se în evidență ecuația carteziană implicită, ecuațiile parametrice și ecuația vectorială.

Soluție (fig. IV. 12). Fie $M(x, y)$ și $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{MB}$. Rezultă $x = \frac{2\alpha}{3}$, $y = \frac{\beta}{3}$ și $\alpha^2 + \beta^2 = 36$.

Eliminînd parametrii α, β între aceste trei relații, obținem elipsa $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ de semiaxe $a = 4$, $b = 2$.

Ecuațiile parametrice ale lui E sînt $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, iar ecuația vectorială a lui E este $\bar{r} = 4 \cos t\, \bar{i} + 2 \sin t\, \bar{j}$, $t \in [0, 2\pi)$.

2. Se consideră triunghiurile de tipul $M_1M_2M_3$ înscrise în elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, astfel încît centrele lor de greutate să coincidă cu centrul elipsei.

Să se demonstreze că normalele la elipsă, duse prin vîrfurile triunghiului, sînt concurente.

Soluție (fig. IV. 13). Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3$; $M_i \in E \Leftrightarrow \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - 1 = 0$.

Centrul de greutate $G(x_G, y_G)$ are coordonatele $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, iar $G = 0$, implică $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Ecuațiile tangentelor la elipsa E, în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt $\frac{x_i x}{a^2} + \frac{y_i y}{b^2} - 1 = 0$, $i = 1, 2, 3$.

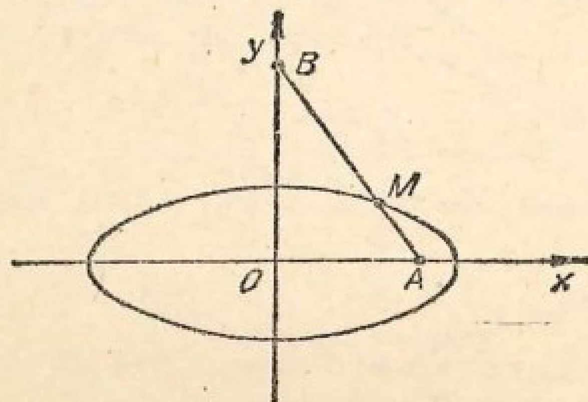


Fig. IV. 12

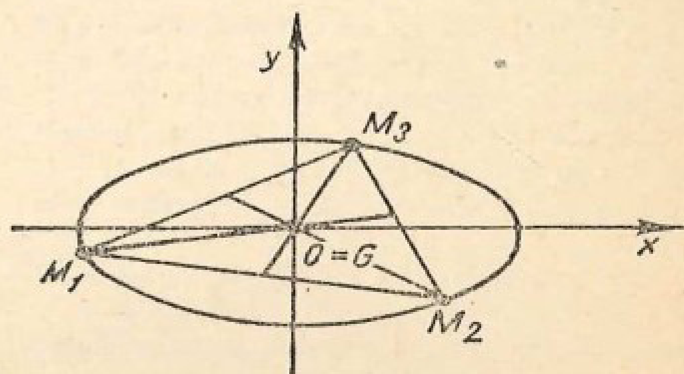


Fig. IV. 13

Ecuațiile normalelor în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt

$$a^2y_1x - b^2x_1y + (b^2 - a^2)x_1y_1 = 0.$$
$$a^2y_2x - b^2x_2y + (b^2 - a^2)x_2y_2 = 0.$$
$$a^2y_3x - b^2x_3y + (b^2 - a^2)x_3y_3 = 0.$$

Aceste trei ecuații formează un sistem cu două necunoscute x, y, care este compatibil determinat deoarece avem

$$\begin{vmatrix} a^2y_1 & -b^2x_1 \\ a^2y_2 & -b^2x_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a^2y_1 & -b^2x_1 & (b^2-a^2)x_1y_1 \\ a^2y_2 & -b^2x_2 & (b^2-a^2)x_2y_2 \\ a^2y_3 & -b^2x_3 & (b^2-a^2)x_3y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2b^2(b^2 - a^2)\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că cele trei normale sînt concurente.

Teme. 1) Utilizînd ecuațiile parametrice ale elipsei E să se verifice existența triunghiurilor de tipul $M_1M_2M_3$. 2) Tangentele la E duse prin M_1, M_2, M_3 nu sînt concurente. De ce?

3. Să se arate că:

1) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și perimetrul date, triunghiul isoscel are aria maximă;

2) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și aria date, triunghiul isoscel are cel mai mic perimetru.

Soluție (fig. IV. 14). 1) Considerăm punctele fixe A, B și un sistem cartezian de axe ca în figură. Triunghiul ABM are perimetrul constant dacă și numai dacă M aparține elipsei de focare A și B. Este evident că triunghiul cu cea mai mare înălțime are cea mai mare arie; aceasta are loc pentru $M = C$, adică în cazul cînd ABC este un triunghi isoscel.

2) Se fixează baza $[AB]$ și lungimea înălțimii $d(O, C)$, unde $O(0, 0)$, $C(0, v)$, $C'(0, -v)$. Orice punct $N(x, y)$ din plan cu proprietățile $|y| = v$; $N \neq C$, $N \neq C'$ aparține exteriorului elipsei de focare A, B și deci perimetrul triunghiului ABN este mai mare decît perimetrul triunghiului ABC.

4. Considerăm planul complex. Fiecărui punct M, de afix $w = u + iv \neq 0$ i se asociază punctul P de afix $z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$.

1) Să se exprime coordonatele x și y ale punctului P în funcție de modulul ρ și argumentul α ale lui w.

2) Să se arate că dacă M descrie cercul $u^2 + v^2 = r^2$, $r \neq 1$, atunci punctul P descrie o elipsă E.

Să se calculeze distanța focală a elipsei.

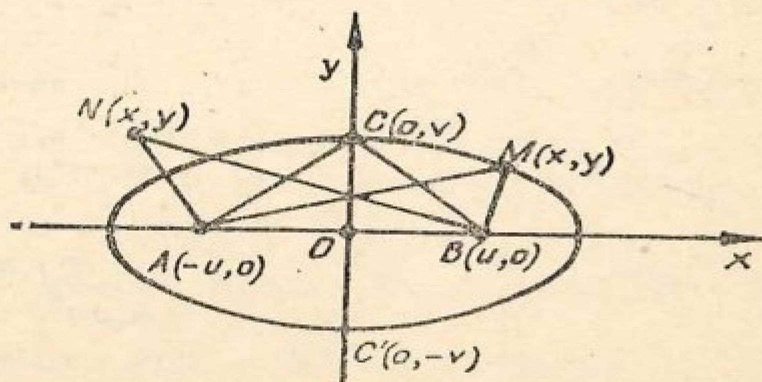


Fig. IV. 14

Soluție. 1) Dacă ρ este modulul, iar α argumentul numărului complex $w = u + iv$, atunci $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, cu $i^2 = -1$, iar $\frac{1}{w} = \frac{1}{\rho}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$, $\rho \in (0, \infty)$,

Rezultă

$$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\Leftrightarrow x+\mathrm{i}y=\frac{1}{2}\left[\rho(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)+\frac{1}{\rho}(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)\right] \text{ sau } x=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\alpha,\quad y=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\alpha.$$

2) Pentru a demonstra că punctul P descrie o elipsă, dacă punctul M descrie cercul $u^2+v^2=r^2$, $r\neq 1$, vom elimina parametrul α între relațiile care dau pe x și y:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha \\ y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{4r^2x^2}{(r^2+1)^2}=\cos^2\alpha \\ \frac{4r^2y^2}{(r^2-1)^2}=\sin^2\alpha \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E:\frac{x^2}{\left(\frac{r^2+1}{2r}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r^2-1}{2r}\right)^2}=1.$$

Rezultă $a=\frac{r^2+1}{2r}$, $b=\frac{|r^2-1|}{2r}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\left(\frac{r^2+1}{2r}\right)^2-\left(\frac{r^2-1}{2r}\right)^2}=1$, adică distanța focală este 2.

Temă. Ce descrie punctul P dacă $r=1$?

§ 3. Hiperbola

Fie c un număr real strict pozitiv și F', F două puncte fixate din plan astfel încît $d(F', F)=2c$.

Definiție. Fie $a\in(0, c)$. **Mulțimea H a punctelor M cu proprietatea**

$$|d(M, F')-d(M, F)|=2a$$

se numește hiperbolă.

Punctele F' și F se numesc *focarele hiperbolei*, dreapta $F'F$ se numește *axa focală*, distanța $d(F', F)=2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *razele focale* ale punctului M.

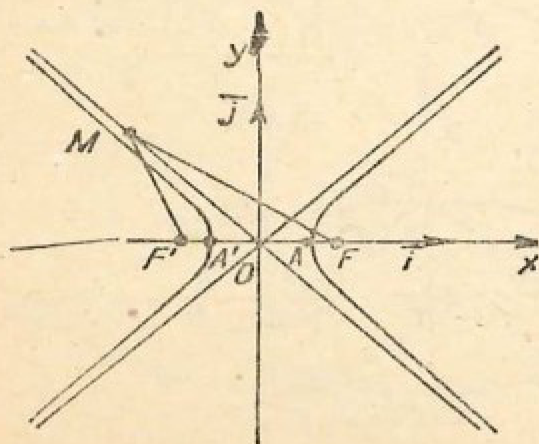


Fig. IV. 15

Temă. Să se arate că hiperbola nu este mulțimea vidă.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea segmentului $F'F$ sînt *axe de simetrie* pentru H. Punctul lor comun O este *centru de simetrie*. Fixînd reperul cartezian ca în figura IV. 15 rezultă $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$.

Teoremă. *Punctul $M(x, y)$ aparține hiperbolei H dacă și numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=c^2-a^2.$$

Demonstrație. Pentru orice punct $M(x, y)$ din plan notăm $d(M, F') = \rho'$ și $d(M, F) = \rho$. Avem

$$\begin{cases} \rho'^2 = (x + c)^2 + y^2, \\ \rho^2 = (x - c)^2 + y^2, \end{cases} \Rightarrow (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx.$$

Punem $H = H' \cup H''$, unde $H' = \{M \in p \mid \rho - \rho' = 2a\}$, $H'' = \{M \in \in p \mid \rho' - \rho = 2a\}$.

Rezultă

$$M \in H' \Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' - \rho = -2a, \\ \rho' \in [c - a, \infty),\ \rho \in [c + a, \infty),\ \rho' < \rho \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = -a - \dfrac{cx}{a} \\ \rho = a - \dfrac{cx}{a} \end{cases},\ x \in (-\infty, -a]$$

$$M \in H'' \Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' - \rho = 2a \\ \rho' \in [a + c, \infty), \quad \rho \in [c - a, \infty) \\ \rho' > \rho \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = a + \dfrac{cx^2}{a} \\ \rho = -a + \dfrac{cx}{a} \end{cases},\ x \in [a, \infty).$$

Deci

$$M \in H = H' \cup H'' \Rightarrow \begin{cases} (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{cx}{a}\right)^2 \\ (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{cx}{a}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Notînd $b^2 = c^2 - a^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel, $H = \left\{M(x, y) \,\middle|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ sau mai scurt $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a hiperbolei. Axa Ox taie hiperbola H în punctele $(-a, 0)$, $(a, 0)$ numite *vîrfurile hiperbolei*. De aceea axa Ox se numește *axa transversă* a hiperbolei. Axa Oy nu intersectează pe H (axă netransversă). Folosind funcția *cosinus hiperbolic*, $\text{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{ch}\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ și funcția *sinus hiperbolic*, $\text{sh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{sh}\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, care satisfac identitatea $\mathbf{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ ajungem la ur-

mătoarele concluzii: ramura $H' : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \leq -a$, are *ecuațiile parametrice* $x = a\text{ch}t$, $y = b\text{sh}t$, $t \in \mathbb{R}$ echivalente cu ecuația vectorială $\bar{r} = -a\text{ch}t\bar{i} + b\text{sh}t\bar{j}$, $t \in \mathbb{R}$; ramura $H'' : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq a$ are *ecuațiile parametrice* $x = a\text{ch}t$, $y = b\text{sh}t$, $t \in \mathbb{R}$ echivalente cu ecuația vectorială $\bar{r} = a\text{ch}t\bar{i} + b\text{sh}t\bar{j}$, $t \in \mathbb{R}$.

Fie hiperbola H de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \end{cases}, \; x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

Ecuația $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \geq 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \leq 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziene explicite*.

Dacă notăm cu H_1 și H_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \; x \to -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

definite respectiv pe $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, atunci se observă că

$$H = H_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup H_2.$$

Dreptele de pante $\pm\frac{b}{a}$ care trec prin origine sînt drepte care nu taie hiperbola. Acestea se numesc *asimptotele hiperbolei H*. Ecuația reuniunii asimptotelor este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Fie $M_0(x_0, y_0) \in H$. Ca și la elipsă se dovedește (temă!) că hiperbola H are în fiecare punct M_0 *o tangentă* de ecuație

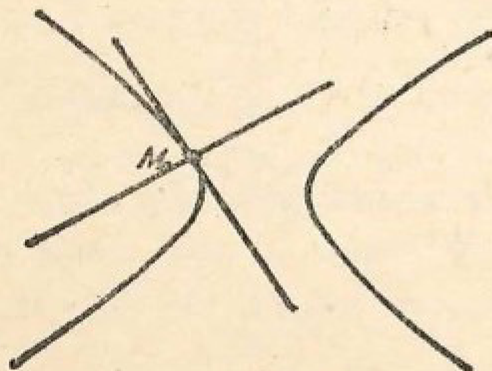


Fig. IV. 16

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b_2} = 1$$

(*dedublata ecuației hiperbolei în punctul* $M_0(x_0\ y_0)$). Perpendiculara pe tangentă în punctul M_0 se numește *normala hiperbolei* în punctul M_0 (fig. IV. 16).

Discuția precedentă arată că hiperbola H are alura din figura IV. 15.

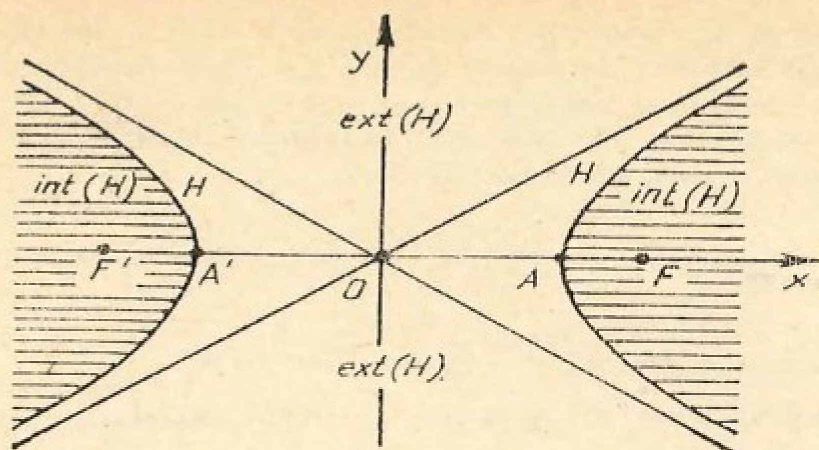


Fig. IV. 17

T e m ă. Să se arate că tangenta şi normala la hiperbolă în punctul M_0 sînt bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele $F'M_0$ şi FM_0.

O hiperbolă are proprietatea că separă planul în două submulţimi disjuncte (fig. IV. 17): *interiorul* lui H notat int(H)şi *exteriorul* lui H notat ext(H). Utilizînd funcţia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ avem $\text{int}(H) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $H = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(H) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $\text{in}(H) \cap \text{ext}(H) = \emptyset$, $\text{int}(H) \cup H \cup \text{ext}(H) = p$, $\text{int}(H) = \text{int}(H') \cup \text{int}(H'')$, $\text{int}(H') \cap \text{int}(H'') = \emptyset$.
Mulţimea ext(H) conţine centrul O. Mulţimea int(H) conţine focarele F' şi F.

Construcţia hiperbolei prin puncte (fig. IV. 18). Presupunem că se dau focarele F', F şi numărul $2a = |\,d(M, F') - d(M, F)\,|$ cuprins între zero şi distanţa focală $d(F', F) = 2c$.

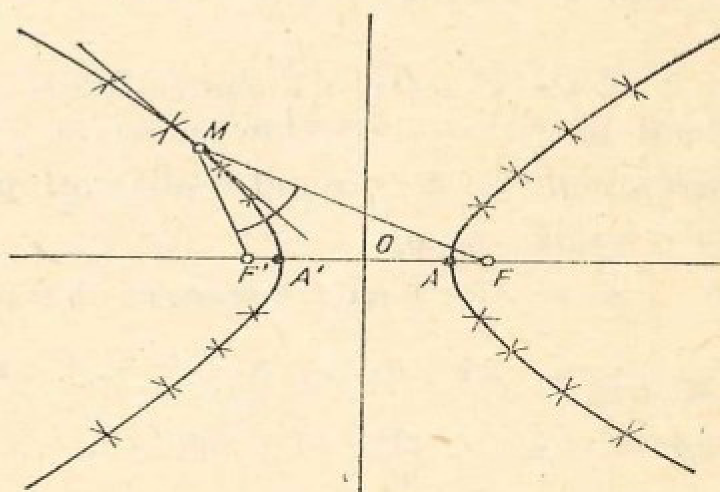
1) Fie O mijlocul segmentului $[F'F]$ şi $[A'A]$ segmentul de lungime $2a$ cu mijlocul în O. Evident A', A sînt puncte ale hiperbolei.

2) Se construieşte o semidreaptă $[DC$, unde $[DC]$ este un segment congruent cu $[A'A]$. Pe această semidreaptă se fixează punctele 1, 2, 3,...

3) Se ia în compas distanţa de la D la 1 şi cu vîrful compasului în F se trasează două arce de cerc deasupra şi dedesubtul axei focale.

4) Se ia în compas distanţa de la C la 1 şi cu vîrful compasului în F' se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite la 3). Intersecţiile acestor arce dau două puncte ale hiperbolei pe ramura din stînga.

5) Se repetă paşii 3) şi 4) schimbînd F cu F' şi astfel se obţin două puncte ale hiperbolei pe ramura din dreapta.



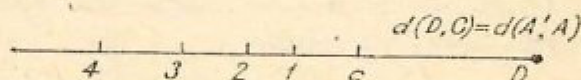


Fig. IV. 18

6) Se repetă pașii 3), 4), 5) folosind distanțele de la D la 2, de la C la 2,... pînă cînd se precizează un număr suficient de puncte pentru a putea trasa hiperbola.

Pentru desenarea efectivă se poate ține seama și de faptul că hiperbola nu este „ascuțită" în vecinătatea vîrfurilor, iar tangenta în punctul M al hiperbolei este bisectoarea „interioară" a unghiurilor dreptelor MF' și MF.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dă hiperbola H: $2x^2 - 5y^2 - 10 = 0$.

1) Să se determine vîrfurile și asimptotele lui H.

2) Să se scrie ecuațiile parametrice respectiv vectoriale ale ramurilor lui H.

3) Să se găsească ecuația tangentei și ecuația normalei în punctul de coordonate $(\sqrt{10}, \sqrt{2})$.

Soluție. 1) Scriem ecuația lui H sub forma $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} - 1 = 0$. Rezultă $a^2 = 5$, $b^2 = 2$ și deci $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$. Vîrfurile lui H sînt $A'(-\sqrt{5}, 0)$, $A(\sqrt{5}, 0)$. Relația $c^2 = a^2 + b^2$ dă $c^2 = 7$ și deci focarele sînt $F'(-\sqrt{7}, 0)$, $F(\sqrt{7}, 0)$.

Reuniunea asimptotelor lui H are ecuația $2x^2 - 5y^2 = 0$. Explicit cele două asimptote au respectiv ecuațiile $y = \sqrt{\frac{2}{5}}\, x$, $y = -\sqrt{\frac{2}{5}}\, x$.

2) Ramura din semiplanul $x \geqslant \sqrt{5}$ are ecuațiile parametrice $x = \sqrt{5}$ ch t, $y = \sqrt{2}$ sh t, $t \in \mathbf{R}$ și ecuația vectorială $\bar{r} = \sqrt{5}$ ch $t\bar{i} + \sqrt{2}$ sh $t\bar{j}$.

3) Ecuația carteziană a tangentei se obține prin dedublare: $2\sqrt{10}\, x - 5\sqrt{2}\, y - 10 = 0$. Rezultă ecuația normalei: $y - \sqrt{2} = -\frac{2}{\sqrt{5}}(x - \sqrt{10})$.

2. Pe axa Ox a reperului cartezian xOy se iau punctele M și N astfel încît produsul absciselor lor să fie constanta a^2. Prin M și N se duc două drepte MP și NP, avînd coeficienții unghiulari egali respectiv cu $\frac{b}{a}$ și $-\frac{b}{a}$, $a, b \in (0, +\infty)$.

Să se afle locul geometric al punctului P.

Soluție. Fie $M(\alpha, 0)$, $N(\beta, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha\beta = a^2$ (1). Rezultă MP: $y = \frac{b}{a}(x - \alpha)$ (2); NP: $y = -\frac{b}{a}(x - \beta)$ (3).

Pentru a scrie ecuația carteziană a locului geometric descris de punctul P, vom elimina parametrii α și β, între relațiile (1), (2), (3).

Ecuațiile (2) și (3) se mai pot scrie astfel $y - \frac{b}{a}x = -\frac{b}{a}\alpha$, $y + \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\beta$. Înmulțind aceste două ecuații membru cu membru și ținînd cont de relația (1), obținem ecuația unei hiperbole

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

3. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ și $C(0, -1)$. O dreaptă variabilă d ce trece prin origine taie pe AB în P și pe AC în Q.
Se cer:

1) coordonatele mijlocului M al segmentului PQ,

2) locul geometric al lui M cînd dreapta d se rotește în jurul lui Q,

3) să se determine dreapta d astfel încît $d(O, A) = d(M, A)$.

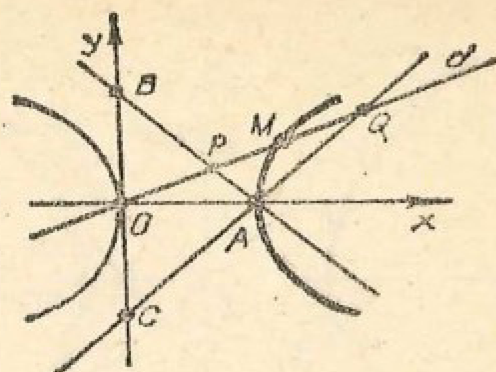


Fig. IV. 19

Soluție (fig. IV. 19). Avem $AB: x + y - 1 = 0$, $AC: x - y - 1 = 0$, $d: ax + by = 0$. Astfel pentru $a - b \neq 0$ găsim $P\left(\frac{-b}{a-b}, \frac{a}{a-b}\right)$ și $Q\left(\frac{b}{a+b}, \frac{-a}{a+b}\right)$ pentru $a \neq b$. Coordonatele lui M sînt

$$x = -\frac{b}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

2) Presupunem că a și b sînt variabili. Prin eliminarea lui a și b, între relațiile precedente, găsim ecuația carteziană a locului geometric descris de M și anume $x^2 - y^2 - x = 0$. Această ecuație se poate transcrie în forma

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0.$$

Astfel ea reprezintă o hiperbolă cu centrul în punctul $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, cu vîrfurile $A(1, 0)$, $O(0, 0)$ și cu asimptotele de ecuații $2x - 2y - 1 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.

3) Din $d(O, A) = d(M, A)$ rezultă $\left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{ab}{a^2 - b^2}\right)^2 = 1$ sau $b^4 - 3a^2b^2 = 0$. Valoarea $b = 0$ nu convine problemei. Rămîne $b^2 = 3a^2$ adică $b = \pm a\sqrt{3}$. Astfel obținem două drepte care fac cu Ox respectiv unghiurile $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{5\pi}{6}$.

4. Se consideră dreptele $d_m: (m^2 + 1)x + 2my + 1 - m^2 = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

1) Există trei drepte distincte $d_{m_1}, d_{m_2}, d_{m_3}$ care trec printr-un punct dat al planului?

2) Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului?

Soluție. 1) Fie

$$\begin{cases} (m_1^2 + 1)x + 2m_1y + 1 - m_1^2 = 0, \\ (m_2^2 + 1)x + 2m_2y + 1 - m_2^2 = 0, \\ (m_3^2 + 1)x + 2m_3y + 1 - m_3^2 = 0 \end{cases}$$

sistemul format cu ecuațiile celor trei drepte distincte $d_{m_1}, d_{m_2}, d_{m_3}$.

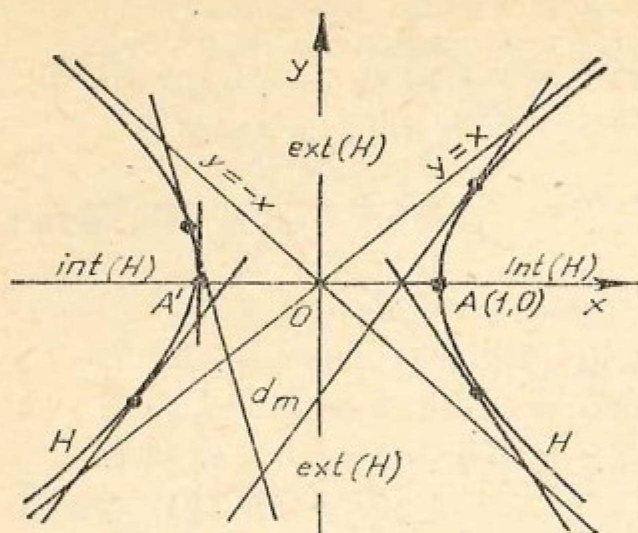


Fig. IV. 20

Deoarece

$$\begin{vmatrix} m_1^2+1 & 2m_1 & 1-m_1^2 \\ m_2^2+1 & 2m_2 & 1-m_2^2 \\ m_3^2+1 & 2m_3 & 1-m_3^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1 \\ m_2^2 & m_2 & 1 \\ m_3^2 & m_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3) \neq 0$$

(determinant Vandermonde), nu există trei drepte distincte concurente.

2) Se observă că $d_m: m^2(x-1) + 2my + x + 1 = 0$. Fie $x = 1$; atunci ecuația în m este de gradul unu, $my + 1 = 0$. De aceea prin fiecare punct de coordonate $(1, y)$, $y \neq 0$ trece o singură dreaptă d_m, iar prin punctul de coordonate $(1, 0)$ nu trece nici o dreaptă d_m.

Fie $x \neq 1$. Ecuația de gradul doi în m are soluții reale numai dacă $x^2 - y^2 - 1 \leq 0$. Dar ecuația $x^2 - y^2 - 1 = 0$ reprezintă o hiperbolă H. Astfel prin fiecare punct al lui H diferit de punctul de coordonate $(1, 0)$ trece o singură dreaptă d_m, prin fiecare punct al regiunii ext $(H) - \{(1, y), y \neq 0\}$ trec două drepte distincte, iar prin fiecare punct al regiunii int(H) nu trece nici o dreaptă.

Evident a doua întrebare o conține pe prima.

Comentariu (fig. IV. 20). 1) Dreptele d_m, $m = \pm 1$, sînt asimptotele hiperbolei H.

2) Fie $M_0(x_0, y_0) \in H$, adică $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$, și $xx_0 - yy_0 - 1 = 0$ ecuația tangentei la H în punctul M_0. Deoarece $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$ dacă și numai dacă $\frac{x_0}{m^2+1} = \frac{-y_0}{2m} = \frac{-1}{1-m^2}$, $\forall m \neq \pm 1$ rezultă că toate dreptele d_m, $m \neq \pm 1$ sînt tangente la H.

5. Raportăm planul la reperul cartezian xOy și considerăm dreptele h: $x + y = 0$, k: $x - y = 0$. Să se găsească distanțele de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreptele h și k. În ipoteza $x_0^2 - y_0^2 = 1$, să se calculeze limitele acestor distanțe pentru $x_0 \to \pm\infty$.

Soluție Se obține $d(M_0; h) = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}}$, $d(M_0; k) = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}$.

Relația $x_0^2 - y_0^2 = 1$ se transcrie $y_0 = \pm\sqrt{x_0^2 - 1}$. Rezultă

$$\lim_{x_0 \to +\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \to +\infty} \frac{|x_0 + \sqrt{x_0^2-1}|}{\sqrt{2}} = \infty,$$

$$\lim_{x_0 \to +\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \to +\infty} \frac{|x_0 - \sqrt{x_0^2-1}|}{\sqrt{2}} = \lim_{x_0 \to +\infty} \frac{1}{2|x_0 + \sqrt{x_0^2-1}|} = 0,$$

$$\lim_{x_0 \to -\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \to -\infty} \frac{|x_0 + \sqrt{x_0^2-1}|}{\sqrt{2}} = \lim_{x_0 \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\,|x_0 - \sqrt{x_0^2-1}|} = 0,$$

$$\lim_{x_0 \to -\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \to -\infty} \frac{|x_0 - \sqrt{x_0^2-1}|}{\sqrt{2}} = \infty.$$

Analog se calculează și $\lim_{x_0 \to \pm\infty} d(M_0; k)$.

§ 4. Parabola

Fie h o dreaptă din plan și F un punct care nu aparține lui h.

Definiție. Mulțimea P a punctelor M cu proprietatea

$$d(M;\ h) = d(M,\ F)$$

se numește parabolă.

Punctul F se numește *focarul parabolei*, iar dreapta h se numește *directoarea parabolei*. Parabola nu este vidă: fie $B \in h$, un punct fixat, fie k perpendiculara în B pe h și l mediatoarea segmentului $[BF]$; notînd $\{M\} = k \cap l$ rezultă $M \in P$.

Fie A proiecția lui F pe h. Dreapta AF este *axă de simetrie* pentru parabola P. Numărul $p = d(A, F) > 0$ se numește *parametrul parabolei*. Notînd cu O mijlocul segmentului $[AF]$ și alegînd reperul cartezian $\{O;\ \bar{i},\ \bar{j}\}$ ca în figura 21 avem

$$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right),\quad h : x = -\frac{p}{2},\quad A\left(-\frac{p}{2},\ 0\right).$$

Teoremă. *Punctul $M(x,\ y)$ aparține parabolei P dacă și numai dacă*

$$y^2 = 2px.$$

Demonstrație. $M \in P \Leftrightarrow d(M;\ h) = d(M,\ F) \Leftrightarrow d^2(M;\ h) = d^2(M,\ F) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Deci $P = \{M(x,\ y) \mid (x,\ y) \in \mathbf{R}^2,\ y^2 = 2px\}$ sau $P\colon\ y^2 = 2px$. Ecuația $y^2 = 2px$, $(x,\ y) \in \mathbf{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită a parabolei*. Aceasta este echivalentă cu *ecuațiile parametrice*

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t,\quad t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

sau cu ecuația vectorială

$$\bar{r} = \frac{t^2}{2p}\,\bar{i} + t\bar{j},\quad t \in \mathbf{R}.$$

Axa Ox taie parabola în punctul $O(0,\ 0)$ numit *vîrful parabolei*. De aceea Ox se numește *axă transversă*. Axa Oy este *netransversă*.

Fie parabola P de ecuație

$$y^2 = 2px,\quad x \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2px} \\ \text{sau} \\ y = -\sqrt{2px} \end{cases},\quad x \geqslant 0.$$

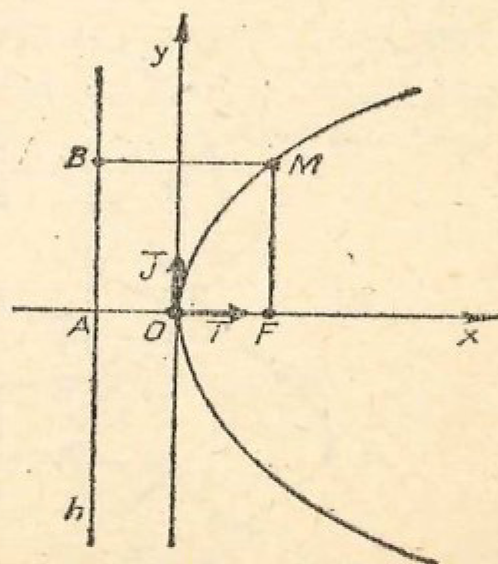


Fig. IV. 21

Ecuația $y = \sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în primul cadran, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, iar ecuația $y = -\sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în cadranul patru, $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Acestea se numesc *ecuații carteziene explicite*.

Dacă notăm cu P_1 și P_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \to \sqrt{2px}, \quad x \to -\sqrt{2px}$$

definite respectiv pe $(0, \infty)$, atunci se observă că

$$P = P_1 \cup \{(0, 0)\} \cup P_2$$

și deci parabola are alura din figura IV. 21.

Fie $M_0(x_0, y_0) \in P$. Împrumutînd procedeul de la elipsă se poate arăta (temă!) că parabola P are în fiecare punct M_0 o tangentă de ecuație

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

(dedublata ecuației parabolei în punctul $M_0(x_0, y_0)$). Dreapta care trece prin M_0 și este perpendiculară pe tangentă se numește *normala parabolei* în punctul M_0 (fig. IV. 22).

T e m ă. Fie $M_0(x_0, y_0) \in P$, fie B proiecția lui M pe directoarea h și F focarul lui P. Să se verifice următoarele proprietăți:

1) Tangenta la P în M_0 este mediatoarea segmentului $[BF]$.

2) Tangenta la P în M_0 este bisectoarea unghiului $(\widehat{\overrightarrow{M_0F}, \overrightarrow{M_0B}})$.

3) Proiecția ortogonală a focarului pe tangentă în M_0 aparține tangentei în vîrf.

4) Simetricul focarului în raport cu tangenta în M_0 aparține directoarei.

Parabola P împarte planul în două submulțimi disjuncte (fig. IV. 23): interiorul lui P notat int(P) și exteriorul lui P notat ext(P). Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcției $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = y^2 - 2px$. Anume int$(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $P = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, ext$(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$.

$$\text{int}(P) \cap \text{ext}(P) = \emptyset, \quad \text{int}(P) \cup P \cup \text{ext}(P) = p.$$

Mulțimile int(P) și int$(P) \cup P$ sînt convexe și conțin focarul F. Directoarea parabolei este conținută în ext(P).

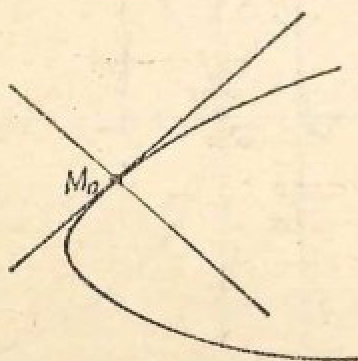


Fig. IV. 22

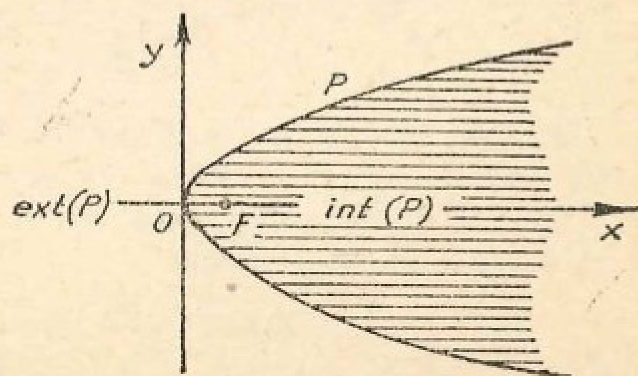


Fig. IV. 23

Construcția parabolei prin puncte (fig. IV. 24). Presupunem că se dau focarul F și directoarea h.

1) Se localizează focarul F și directoarea h.

2) Se desenează dreptele 1, 2, 3,... paralele cu directoarea.

3) Se ia în compas distanța de la directoarea h la dreapta 1. Cu vîrful compasului în focar, se trasează două arce de cerc care intersectează dreapta 1. Astfel se obțin două puncte ale parabolei.

4) Se repetă pasul 3) pentru dreptele 2,3,...

5) După determinarea unui număr suficient de puncte, se desenează parabola ținîndu-se seamă că vîrful O este la jumătatea distanței dintre h și F, iar tangenta în fiecare punct M de pe parabolă este bisectoarea unghiului $\widehat{FMB}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian xOy se dau punctul $A(1,0)$ și dreapta $d: x + 1 = 0$.

1) Să se găsească ecuația cercurilor C care trec prin A și cu centrele pe dreapta d.

2) Un cerc C taie dreapta d în punctele P și Q. Tangentele la C în P și Q întîlnesc tangenta la C în A respectiv în punctele M și N. Să se găsească locul geometric al punctelor M și N.

Soluție (fig. IV. 25). Fie $R(-1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, centrul cercului variabil C. Raza acestui cerc este $d(R, A) = \sqrt{4 + \lambda^2}$. Rezultă $C_\lambda : (x + 1)^2 + (y - \lambda)^2 = 4 + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Raza minimă a cercurilor C_λ este 2 și se obține pentru $\lambda = 0$.

2) Se observă că $d(M, A) = d(M, P)$, $d(N, A) = d(N, Q)$, $MP \perp d$, $NQ \perp d$. Deci $d(M, A) = d(M; d)$, $d(N, A) = d(N; d)$, adică M și N aparțin parabolei de focar A și directoare d. Se observă însă că vîrful parabolei nu convine problemei.

Notă. Rezolvarea pur analitică a acestei probleme cere prea multe calcule și precauții.

2. Prin focarul F al unei parabole $P: y^2 = 2px$ se duc două drepte variabile perpendiculare, care intersectează directoarea parabolei în punctele M_1 și M_2. Paralele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei taie curba P în punctele N_1 și N_2. Să se arate că punctele N_1, N_2 și F sînt coliniare.

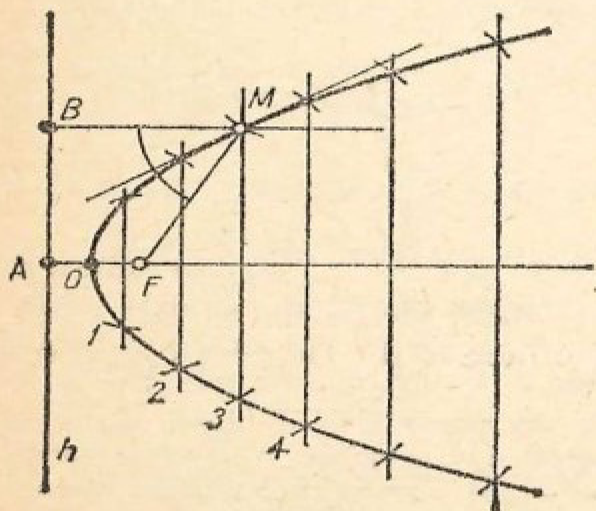


Fig. IV. 24

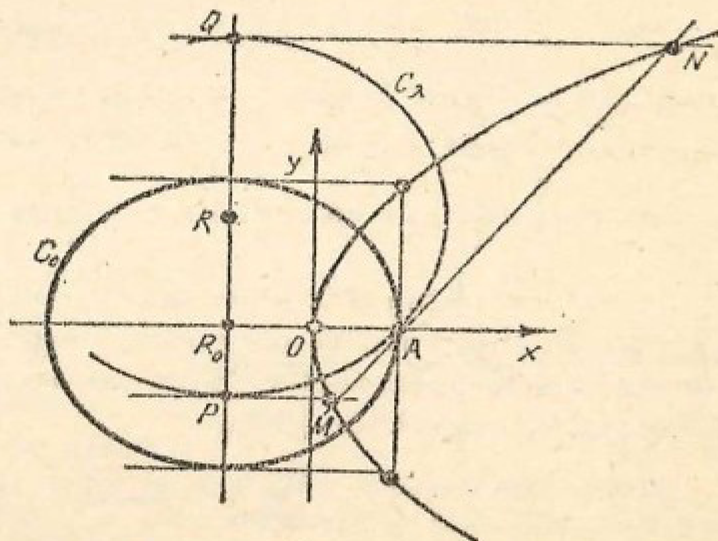


Fig. IV. 25

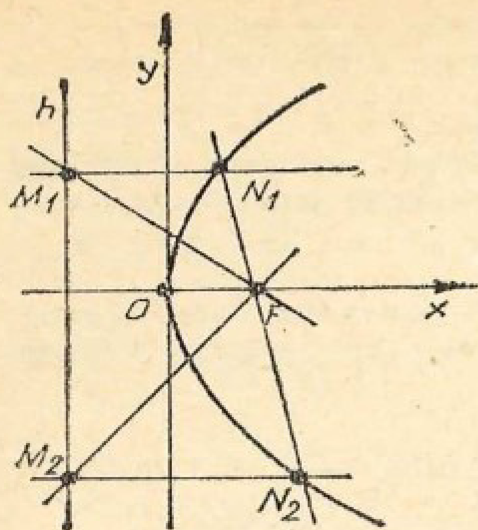


Fig. IV. 26

Soluție (fig. IV. 26). Focarul parabolei $P: y^2 = 2px$ este punctul $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, iar directoarei h îi corespunde ecuația $x = -\frac{p}{2}$. Fie dreptele perpendiculare $d: y = m\left(x - \frac{p}{2}\right)$, $d': y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, cu $m \in \mathbf{R} - \{0\}$.

$$\{M_1\} = d \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1\left(-\frac{p}{2},\ -pm\right).$$

$$\{M_2\} = d' \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{p}{2},\ \frac{p}{m}\right).$$

Paralelele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei au respectiv ecuațiile $y = -pm$ și $y = \frac{p}{m}$. Coordonatele punctelor N_1 și N_2 sînt soluțiile următoarelor sisteme de ecuații

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = -pm \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \frac{p}{m}. \end{cases}$$

Rezolvînd aceste sisteme, obținem

$$N_1\left(\frac{pm^2}{2},\ -mp\right),\quad N_2\left(\frac{p}{2m^2},\ \frac{p}{m}\right).$$

Coordonatele punctelor N_1, N_2 și F verifică condiția de coliniaritate a trei puncte, adică

$$\begin{vmatrix} \frac{pm^2}{2} & -mp & 1 \\ \frac{p}{2m^2} & \frac{p}{m} & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2} \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2} \cdot 0 = 0.$$

3. Fie parabola $P: y^2 = 4ax$ cu directoarea $h: x = -a$. Se consideră o pereche de tangente la parabolă, perpendiculare între ele, și se notează cu M punctul lor de intersecție. Să se arate că dacă punctele de tangență descriu parabola, atunci $h = \{M\}$.

Soluție. Incluziunea $\{M\{ \subseteq h$ se arată fără dificultate: tangentele la P în punctele $(at^2,\ 2at)$, $(as^2,\ 2as)$ au ecuațiile $yt = x + at^2$, $ys = x + as^2$, sînt perpendiculare numai dacă $st = -1$, și deci se intersectează într-un punct de abscisă $x = ast = -a$.

Pentru $h \subseteq \{M\}$ trebuie să arătăm că dacă $N \in h$ atunci (1) există exact două tangente la parabolă ce trec prin N şi (2) ele sînt perpendiculare: punctul $N(-a, r)$ se află pe o tangentă $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbf{R}$ astfel încît $at^2 - rt - a = 0$; deoarece $a \neq 0$ şi $r^2 + 4a^2 > 0$ există două astfel de numere (deci (1) este dovedită) al căror produs este -1 (deci (2) este dovedită).

Relaţiile $\{M\} \subseteq h$, $h \subseteq \{M\}$ sînt echivalente cu $M = h$.

Notă. Problema precedentă putea fi formulată astfel: să se găsească locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente la parabola P, perpendiculare între ele. Am preferat însă enunţul iniţial pentru a pune încă o dată în evidenţă faptul că determinarea locurilor geometrice impune dovedirea a două incluziuni.

4. Să se arate că trei tangente distincte la parabola $P: y^2 = 2px$ determină un triunghi al cărui ortocentru aparţine directoarei parabolei.

Soluţie. Fie parabola $P: y^2 = 2px$ şi trei puncte diferite $T_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, situate pe parabola P, deci $y_i^2 = 2px_i$, $i = 1, 2, 3$.

Ecuaţiile celor trei tangente sînt

$$d_1: 2px - 2y_1y + y_1^2 = 0,$$

$$d_2: 2px - 2y_2y + y_2^2 = 0,$$

$$d_3: 2px - 2y_3y + y_3^2 = 0.$$

Ecuaţia înălţimii triunghiului, corespunzătoare laturii d_1 este

$$2py_1x + 2p^2y - p^2(y_2 + y_3) - y_1y_2y_3 = 0.$$

Intersectînd această înălţime cu directoarea $h: x = -\frac{p}{2}$, obţinem punctul M, de coordonate

$$x = -\frac{p}{2}, \quad y = \frac{y_1y_2y_3 + p^2(y_1 + y_2 + y_3)}{2p^2}.$$

Ordonata y a punctului M, fiind o expresie simetrică în y_1, y_2, y_3, rezultă că ortocentrul triunghiului $M_1M_2M_3$ este situat pe directoarea h.

5. Se dă familia de funcţii $f_a: \mathbf{R} - \mathbf{R}$, $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Să se determine mulţimea tuturor punctelor critice ale funcţiilor f_a. Să se stabilească tipul punctelor critice.

Soluţie. Deoarece $\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}x}(x) = x^2 + a$, mulţimea căutată este parabola $P: x^2 + a = 0$ din planul xOa (fig. IV. 27). Pe de altă parte observăm că $\frac{\mathrm{d}^2 f_a}{\mathrm{d}x^2}(x) = 2x$. De aceea punctele de abscise $x = -\sqrt{-a} < 0$ sînt puncte de maxim, punctul $x = 0$ este un punct de inflexiune, iar punctele de abscise $x = \sqrt{-a} > 0$ sînt puncte de minim. Variantele pentru graficele funcţiilor f_a sînt date în figura IV. 28.

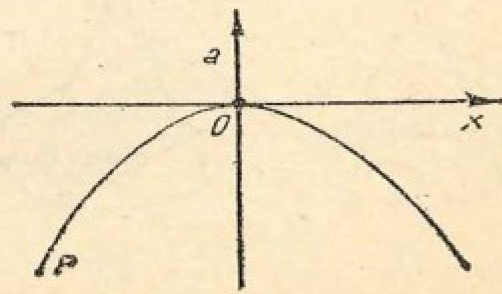


Fig. IV. 27

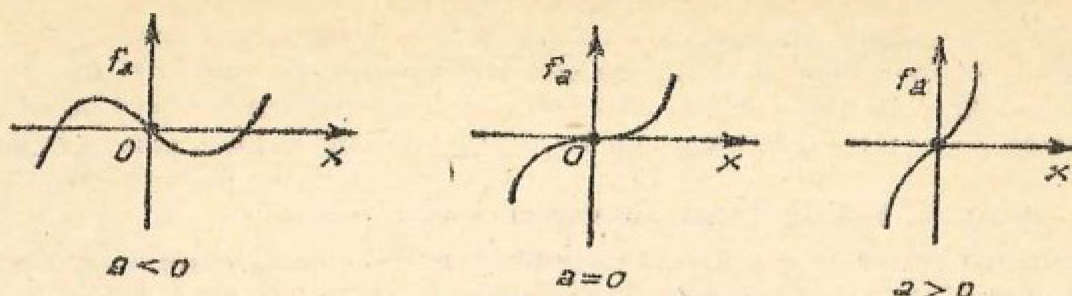


Fig. IV. 28

§ 5. Conice

Curbele de intersecție dintre un con de rotație de axă h și generatoarea g cu un plan p sînt de următoarele tipuri (fig. IV. 29):

1) cerc sau punct, dacă $p \perp h$;

2) elipsă sau punct, dacă $\widehat{(p, h)} > \widehat{(g, h)}$;

3) parabolă sau pereche de drepte confundate, dacă $\widehat{(p, h)} = \widehat{(g, h)}$;

4) hiperbolă sau pereche de drepte, dacă $0° \leqslant \widehat{(p, h)} < \widehat{(g, h)}$.

Toate aceste curbe poartă numele de *conice* și sînt caracterizate prin ecuații de gradul doi în x și y, unde $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. De aceea apare natural să se pună problema generală a cercetării mulțimilor de puncte, din plan, ale căror coordonate constituie soluțiile unei ecuații de gradul doi în $\mathbf{R}^2$.

Fie funcția polinomială

$$g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}.$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Definiție. Mulțimea

$$\Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ g(x, y) = 0\}$$

se numește curbă algebrică de ordinul al doilea sau conică. Pe scurt se notează $\Gamma: g(x, y) = 0$.

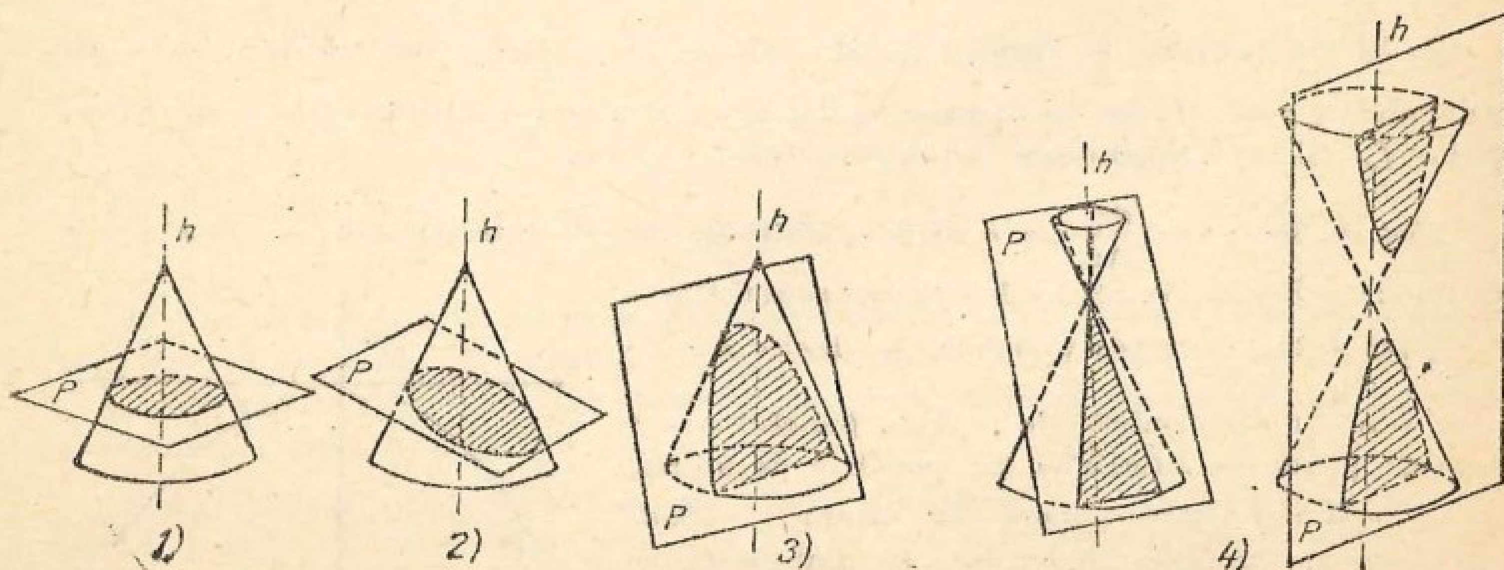


Fig. IV. 29

Teoremă. *Mulțimea* Γ *este congruentă cu una dintre mulțimile din figura IV. 30.*

Demonstrație. Subliniem că enunțul teoremei este echivalent cu fiecare dintre afirmațiile următoare:

1) Γ este fie un cerc (fig. IV.30.1), o elipsă (fig. IV. 30.2), o hiperbolă (fig. IV. 30.3), o parabolă (fig. IV. 30.4), o reuniune de drepte (fig. IV. 30.5, 6, 7), o mulțime care conține un singur punct (fig. IV. 30.8), fie mulțimea vidă (fig. IV. 30.9).

2) orice ecuație de tipul $g(x, y) = 0$ poate fi redusă la una dintre *ecuațiile canonice* scrise în figura IV. 30.

Cazul cînd Γ reprezintă un cerc $(a_{12} = 0,\ a_{11} = a_{22} \neq 0)$ este cunoscut din §1. De altfel cercul poate fi privit ca o elipsă particulară. De aceea acest caz este lăsat deoparte.

Notăm

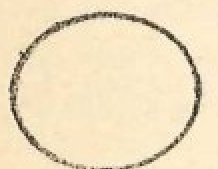
$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

a) Presupunem $a_{12} = 0$. Dacă $\delta \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{10}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{20}}{a_{22}}\right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

și translația

$$\mathcal{T} : x' = x + \frac{a_{10}}{a_{11}},\ y' = y + \frac{a_{20}}{a_{22}}$$



$x^2 + y^2 = r^2$

1



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

3



$y^2 = 2px$

4



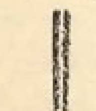
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

5



$x^2 - a^2 = 0$

6



$x^2 = 0$

7



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

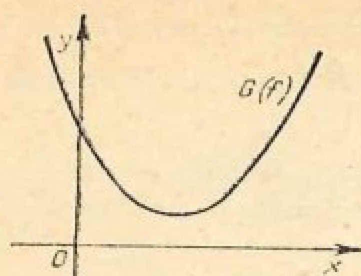
8

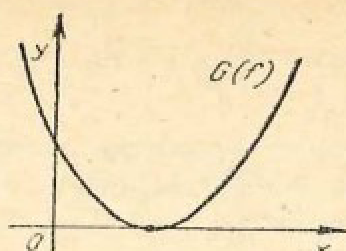


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \vee x^2 + a^2 = 0$

9

Fig. IV. 30





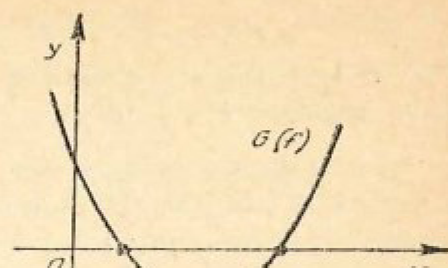


Fig. IV. 31

justifică teorema. Dacă $\delta = 0$, de exemplu $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{22}\left(y + \frac{2a_{20}}{a_{22}}\right)^2 + 2a_{10}x + a_{00} - \frac{4a^2_{20}}{a_{22}} = 0$$

și teorema devine evidentă.

b) Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci unghiul θ determinat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, determină o rotație în plan

$$\mathfrak{R} : \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

astfel încît în ecuația $g'(x', y') = (g \circ \mathfrak{R})(x', y') = 0$ coeficientul produsului $x'y'$ se anulează. Într-adevăr, coeficientul respectiv este $2a_{12} = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta$. Astfel cazul $a_{12} \neq 0$ se reduce la cazul $a_{12} = 0$.

Cazuri particulare

1) Fie trinomul de gradul al doilea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Graficul $G(f)$ are ecuația carteziană explicită $y = ax^2 + bx + c$. Acest grafic este o parabolă (fig. IV. 31, $a > 0$) cu axa transversă paralelă cu Oy și cu vîrful

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

2) Mulțimea de ecuație $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este o hiperbolă cu Oy ca axă transversă și Ox ca axă netransversă avînd aceleași asimptote cu hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Aceste două hiperbole se numesc *conjugate* una alteia (fig. IV. 32).

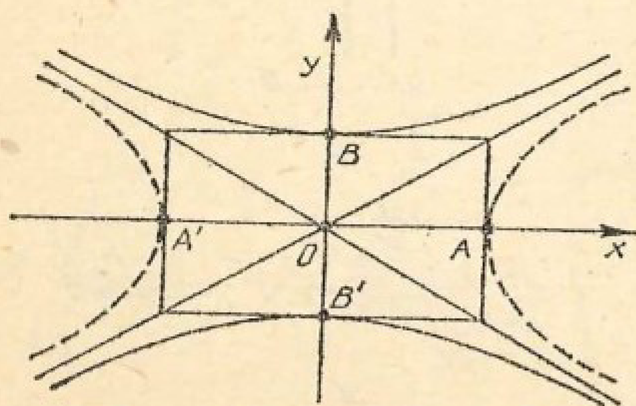


Fig. IV. 32

3) Hiperbola de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$ se numește *hiperbolă echilateră*. Asimptotele acestei hiperbole sînt bisectoarele axelor de coordonate,

$$y = -x \text{ și } y = x.$$

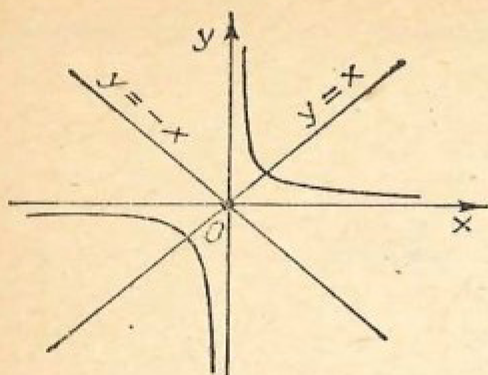


Fig. IV. 33

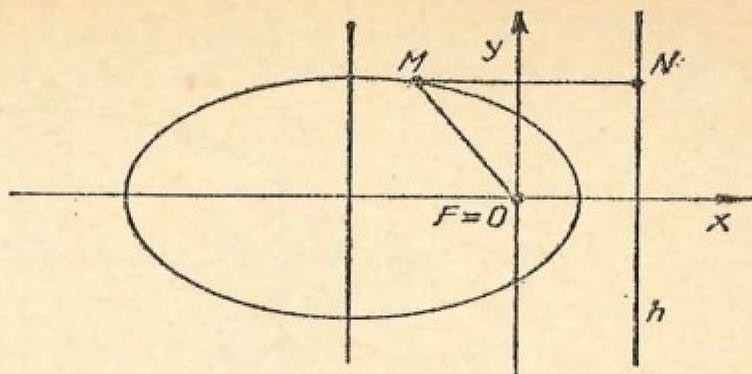


Fig. IV. 34

Fie conica $\Gamma: xy = m^2$. Rotația $\mathcal{R}: x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ pune în evidență că Γ este o hiperbolă echilateră de ecuație canonică $x'^2 - y'^2 = 2m^2$. Asimptotele lui Γ sînt axele de coordonate Ox și Oy, iar axele de simetrie sînt bisectoarele axelor de coordonate (fig. IV. 33).

Definiția comună a elipsei, hiperbolei și parabolei. Fie F un punct fix numit *focar*, h o dreaptă fixă care nu trece prin F, numită *directoare*, și $e \in (0, \infty)$ un număr numit *excentricitate*. Locul geometric al punctelor M cu proprietatea

$$\frac{\mathrm{d}(M, F)}{\mathrm{d}(M; h)} = e$$

este o elipsă în cazul $e \in (0, 1)$, o parabolă pentru $e = 1$ sau o hiperbolă în cazul $e \in (1, \infty)$.

Să explicităm cazul $e \in (0, 1)$. Pentru simplificarea calculelor fixăm reperul cartezian, astfel încît Ox să fie perpendiculară pe h și $F = O$ (fig. IV. 34). Deci $F(0, 0)$, $h: x = \alpha > 0$. Dacă M are coordonatele (x, y), atunci relația precedentă este echivalentă cu ecuația

$$x^2 + y^2 = e^2(x - \alpha)^2,$$

sau altfel scris

$$\frac{\left(x + \frac{r^2}{\alpha}\right)^2}{\frac{r}{1 - e^2}} + \frac{v^2}{r} - 1 = 0,\ r = \frac{\alpha^2 e^2}{1 - e^2}.$$

Aceasta împreună cu translația definită prin $x' = x + \frac{r}{\alpha}$, $y' = y$ pun în evidență că în cazul $e \in (0, 1)$ locul geometric este o elipsă.

Cazul parabolei a fost prezentat în §4, iar cazul $e \in (1, \infty)$ se tratează după modelul precedent.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție a parabolelor de ecuații $y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m$, $y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p$, dacă $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1$.

Soluție. Pentru găsirea ecuației carteziene a locului geometric trebuie să eliminăm parametrii m și p între următoarele ecuații

$$\begin{cases} y = x^2 - \dfrac{3}{2}mx + m^2 + m, \\ y = x^2 - \dfrac{3}{2}px + p^2 + p, \\ \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{mp} = 1. \end{cases}$$

Scăzînd primele două egalități, obținem

$$\left(\frac{3}{2}x - m - p - 1\right)(p - m) = 0.$$

Dacă $p = m$, atunci din ultima ecuație deducem $m^2 - 2m - 1 = 0$ sau $m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; locul geometric căutat este reuniunea parabolelor de ecuații $y = x^2 - \dfrac{3}{2}m_{1,2}x + m_{1,2}^2 + m_{1,2}$.

Dacă $\dfrac{3}{2}x = m + p + 1$, atunci $y = x^2 - mp$. Transcriind ultima ecuație în forma $m + p + 1 = mp$ și eliminînd pe $m + p + 1$ și mp, găsim ecuația $\dfrac{3}{2}x = x^2 - y$, care reprezintă o parabolă cu axa $x = \dfrac{3}{4}$, și tangenta în vîrf $y = -\dfrac{9}{16}$.

2. Să se traseze graficele următoarelor funcții

1) $f_1 : D_1 \to \mathbf{R},\ f_1(x) = \sqrt{x + 1}$,

2) $f_2 : D_2 \to \mathbf{R},\ f_2(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{(1 + x)(5 - x)}$,

3) $f_3 : D_3 \to \mathbf{R},\ f_3(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

Soluție.

$$D_1 = [-1, +\infty),\ y = f_1(x)$$

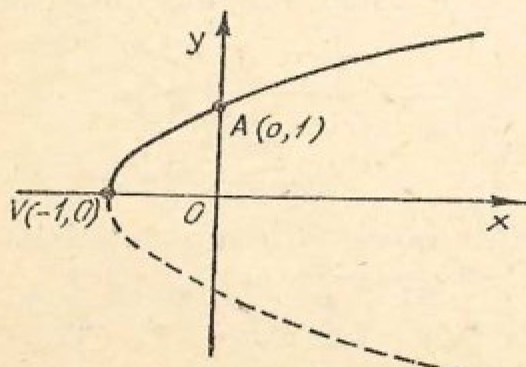


Fig. IV. 35

este ecuația graficului. Echivalența

$$y = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow y^2 = x + 1,\ x \in [-1, +\infty),$$
$$y \in [0, +\infty),$$

arată că graficul lui f_1 este arcul de parabolă din figura IV. 35.

2) $D_2 = [-1, 5]$, $y = f_2(x)$ ecuația graficului. Echivalența

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{(1 + x)(5 - x)} \Leftrightarrow$$

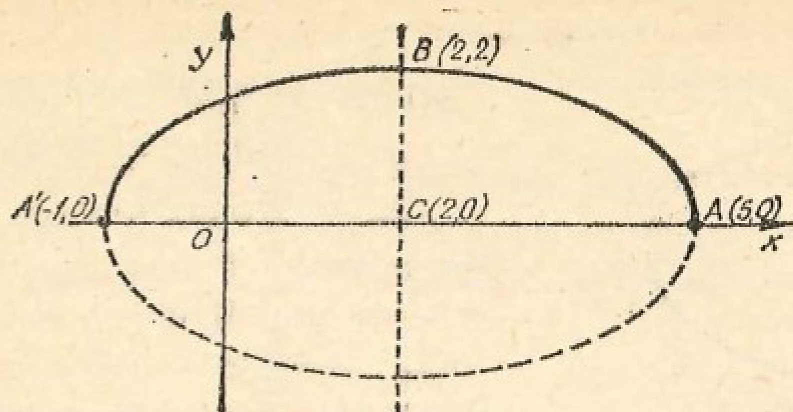


Fig. IV. 36

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{9}[9 - (x - 2)^2], \quad x \in [-1, 5],$

$y \in [0, 2] \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$

$x \in [-1, 5]$, $y \in [0, 2]$ arată că graficul lui f_2 este arcul de eclipsă din figura IV. 36.

3) $D_3 = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, $y = f_3(x)$ ecuația graficului. Echivalența $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 3} \Leftrightarrow y^2 =$

$= \frac{9}{16}[(x-1)^2 - 4], \; x \in (-\infty, -1] \cup$

$\cup [3, +\infty), \; y \in [0, +\infty) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} -$

$- \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1, \quad x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty),$

$y \in [0, \infty)$ pune în evidență că graficul lui f_3 este o parte dintr-o hiperbolă (fig. IV. 37).

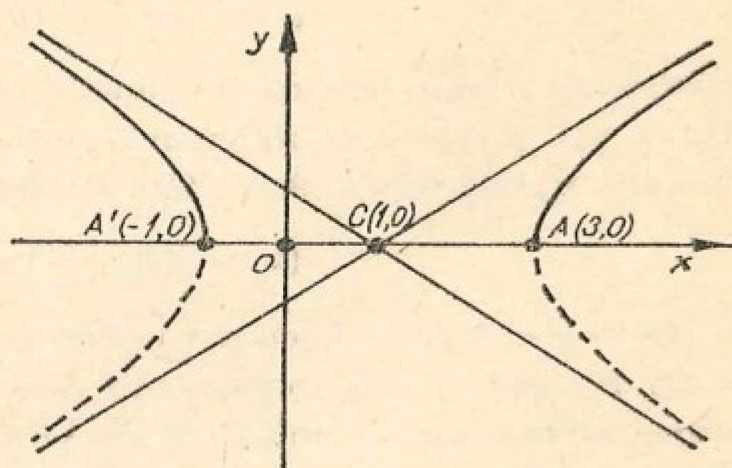


Fig. IV. 37

§ 6. Intersecția dintre o dreaptă și o conică

Fie dreapta d: $x = x_0 + ut$, $y = y_0 + vt$, $t \in \mathbf{R}$ și conica Γ: $g(x, y) = 0$.

T e o r e m ă. *Intersecția*

$d \cap \Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2, x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbf{R}, g(x, y) = 0\}$ este caracterizată de rădăcinile în $\mathbf{R}$ ale ecuației

$$t^2\varphi(u, v) + t(ug_{x_0} + vg_{y_0}) + g(x_0, y_0) = 0,$$

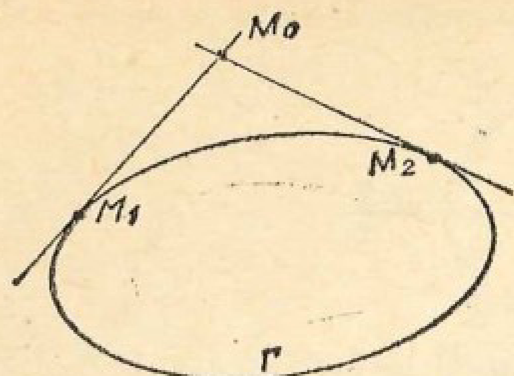


Fig. IV. 38

unde

$$\varphi(u, v) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2,$$

$$g_{x_0} = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}),$$

$$g_{y_0} = 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}).$$

Demonstrație. 1) Fie $\varphi(u, v) \neq 0$. Ecuația în t este de gradul doi și are discriminantul $q = (ug_{x_0} + vg_{y_0})^2 - 4\varphi(u, v)g(x_0, y_0)$. Dacă $q > 0$, atunci ecuația în t are două rădăcini reale distincte t_1, t_2 și deci $d \cap \Gamma = \{M_1, M_2\}$.

Dacă $q = 0$, atunci ecuația în t are două rădăcini reale egale $t_1 = t_2$. În acest caz $d \cap \Gamma = \{M_1\}$, iar dreapta d se numește *tangentă* la Γ în punctul M_1. Evident, din orice punct $M_0(x_0, y_0)$ se pot duce cel mult două tangente la Γ (fig. IV.38). În particular, cînd $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, adică $g(x_0, y_0) = 0$, și g_{x_0}, g_{y_0} nu se anulează simultan, observăm că tangenta la Γ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ are ecuația (fig. IV. 4, 9, 16, 22)

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = 0,$$

(*dedublata ecuației conicei* în punctul $M_0(x_0, y_0)$). Dreapta care trece prin $M_0(x_0, y_0)$, și este perpendiculară pe tangentă, se numește *normala* lui Γ în punctul M_0 (fig. IV. 4, 9, 16, 22). Ea are ecuația

$$(x - x_0)g_{y_0} - (y - y_0)g_{x_0} = 0.$$

Dacă $q < 0$, atunci ecuația în t nu are soluții și deci $d \cap \Gamma = \emptyset$.

2) Fie $\varphi(u, v) = 0$. Ecuația în t este de gradul întîi. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} \neq 0$, atunci avem o soluție unică t_1 și deci $d \cap \Gamma = \{M_1\}$. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) \neq 0$, atunci ecuația în t este o imposibilitate și deci $d \cap \Gamma = \emptyset$. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$, ecuația este identic satisfăcută și deci

$$d \subseteq \Gamma, \text{ de unde } d \cap \Gamma = d.$$

Fie Γ o conică oarecare. O direcție $\bar{a}(u, v)$ se numește *direcție asimptotică* pentru Γ dacă

$$\varphi(u, v) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = 0,$$

în $\mathbf{R}^2$. Evident, o dreaptă care are o asemenea direcție aparține lui Γ sau taie pe Γ într-un singur punct sau nu taie pe Γ.

Fie $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Dacă $\delta < 0$ (conice de *gen hiperbolic*), atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ dă două direcții asimptotice. Dacă $\delta > 0$(conice de *gen eliptic*),

atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ nu are soluții nebanale, adică nu există direcții asimptotice. Dacă $\delta = 0$ *(conice de gen parabolic)*, atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ dă o direcție asimptotică dublă.

O dreaptă d: $x = x_0 + ut$, $y = y_0 + vt$, $t \in \mathbb{R}$ se numește *asimptota* conicei Γ, dacă direcția ei (u, v) este o direcție asimptotică și $d \cap \Gamma = \emptyset$. Se observă că o asimptotă a conicei Γ este caracterizată prin ecuația

$$ug_x + vg_y = 0,$$

unde (u, v) este o direcție asimptotică și $g_{x_0} = 0$, $g_{y_0} = 0$ nu implică $g(x_0, y_0) = 0$.

În concluzie, hiperbola admite două asimptote care trec prin centrul conicei, elipsa nu admite direcții asimptotice și nici asimptote, iar parabola admite o direcție asimptotică, dar nu admite asimptotă (ecuația $ug_x + vg_y = 0$ este o imposibilitate).

Observație. Pentru graficele funcțiilor reale, noțiunea generală de asimptotă este dată în manualul de Analiză matematică.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctul $O(0,0)$, dreapta d: $x + y - 1 = 0$ și conica

$$\Gamma:\ x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0.$$

Se cer:

1) tangentele din O la Γ,

2) ecuația reuniunii $d \cup \Gamma$,

3) elementele mulțimii $d \cap \Gamma$,

4) asimptotele lui Γ,

5) ecuația tangentei și ecuația normalei la Γ în $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Soluție. 1) Se observă că axa Oy nu este tangentă la Γ. Orice altă dreaptă care trece prin origine are ecuația $y = mx$. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} y = mx, \\ x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $(1 + 2m)x^2 + 2(1 + 2m)x - 2 = 0$ și evident $1 + 2m \neq 0$. Punînd condiția ca această ecuație să aibă rădăcină dublă găsim $(1 + 2m)^2 - 2(1 + 2m) = 0$, adică $m = \frac{1}{2}$. Astfel din $O(0, 0)$ se poate duce o singură tangentă la Γ și anume dreapta de ecuație $y = \frac{1}{2}x$.

2) Reuniunea $d \cup \Gamma$ are ecuația

$$(x + y - 1)(x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2) = 0.$$

3) Rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0, \end{cases}$$

găsim soluțiile $(2,\ 1 - \sqrt{2})$, $(-2,\ 1 + \sqrt{2})$. Acestea constituie coordonatele punctelor din $d \cap \Gamma$.

4) Direcțiile (u, v) ale celor două asimptote sînt date de ecuația $u^2 + 2uv = 0$. Rezultă $u = 0$ și $u + 2v = 0$. Astfel găsim direcțiile $(0, v)$ și $(-2, 1)$. Deci

$$0 \cdot (x + y + 1) + v(x + 2) = 0,\quad v \neq 0,$$

respectiv,

$$-2(x + y + 1) + 1 \cdot (x + 2) = 0.$$

Aceasta înseamnă că asimptotele lui Γ au, respectiv, ecuațiile $x + 2 = 0$ și $x + 2y = 0$; deci Γ este o hiperbolă.

5) Prin dedublare găsim ecuația tangentei,

$$x \cdot 0 + \left(0 \cdot y + \frac{1}{2}x\right) + (x + 0) + 2\left(y + \frac{1}{2}\right) - 2 = 0,$$

adică $3x + 4y - 2 = 0$. Panta acestei drepte este $-\frac{3}{4}$, iar panta normalei este $\frac{4}{3}$.

De aceea normala în B la Γ are ecuația $y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}x$.

2. Fie E o elipsă raportată la axe, A, A' vîrfurile sale de pe Ox, iar B, B' cele de pe Oy și P un punct oarecare al elipsei.

1) Să se arate că dreapta determinată de punctele de intersecție ale cercurilor circumscrise triunghiurilor PAA' și PBB' este tangentă în P la E.

2) Fie P_1, P_2 simetricele lui P față de centrele celor două cercuri. Să se arate că dreapta P_1P_2 trece printr-un punct fix.

3) Să se găsească locul geometric al simetricului punctului P față de centrul cercului circumscris triunghiului PAA', cînd $P \in E$.

Soluție. 1) Cercurile care trec prin două puncte au centrele pe mediatoarea segmentului care unește aceste puncte.

Ecuația canonică a elipsei este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. De aceea P are coordonatele $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

Deoarece $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$ sînt simetrice față de Oy, rezultă că cercurile care trec prin A' și A au ecuații de forma $x^2 + (y - v)^2 = a^2 + v^2$, adică $x^2 + y^2 - 2vy = a^2$. Un asemenea cerc trece prin P numai dacă $a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t - 2\, vb \sin t = a^2$, adică

$$2v = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin t.$$

Analog, cercul care trece prin punctele P, $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ are ecuația $x^2 + y^2 - 2ux = b^2$, cu condiția $a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - 2ua \cos t = b^2$, adică $2u = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos t$.

Ecuația dreptei ce trece prin punctele de intersecție ale celor două cercuri se obține scăzînd, membru cu membru, ecuațiile cercurilor; găsim $2ux + 2vy = a^2 - b^2$ cu condițiile $2u = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos t$, $2v = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin t$. Înlocuind pe $2u$ și $2v$, simplificînd cu $a^2 - b^2$, deducem $\frac{x \cos t}{a} + \frac{y \sin t}{b} = 1$, iar aceasta este ecuația tangentei la E în P, obținută prin dedublare.

2) Cercul PAA' are centrul $O_1\left(0,\ v = \frac{b^2 - a^2}{2b} \sin t\right)$, iar cercul PBB' are centrul

$$O_2\left(u = \frac{a^2 - b^2}{2a} \cos t,\ 0\right).$$

De aceea simetricele lui $P(a \cos t, b \sin t)$ față de O_1 și O_2 sînt, respectiv,

$$P_1\left(-a \cos t,\ -\frac{a^2}{b} \sin t\right),\ P_2\left(-\frac{b^2}{a} \cos t,\ -b \sin t\right).$$

Dreapta P_1P_2 are ecuația

$$\frac{x + a \cos t}{\frac{\cos t}{a}} = \frac{y + \frac{a^2}{b^2} \sin t}{\frac{\sin t}{b}},$$

adică $ax \sin t - by \cos t = 0$. Aceasta trece prin origine.

3) Locul geometric al punctului $P_1\left(-a \cos t,\ -\frac{a^2}{b} \sin t\right)$ are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = -a\cos t \\ y = -\dfrac{a^2}{b} \sin t \end{cases},\ t \in [0,\ 2\pi)$$

sau ecuația carteziană implicită

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2y^2}{a^4} = 1.$$

Aceasta este însă o elipsă.

§ 7. Intersecția a două conice

Fie conicele $\Gamma_1 : g(x, y) = 0$ și $\Gamma_2 : h(x, y) = 0$. Intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ este caracterizată prin sistemul

$$\begin{cases} g(x, y) = 0, \\ h(x, y) = 0, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

Deoarece fiecare dintre ecuațiile acestui sistem are gradul doi, intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține cel mult patru puncte.

Presupunem că Γ_1 este cercul de ecuație (1) $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$, iar Γ_2 este cercul de ecuație (2) $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$. Coordonatele punctelor comune trebuie să verifice ambele ecuații, deci și ecuația obținută prin scăderea lor,

$$(3) \qquad 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0.$$

Această ecuație reprezintă o dreaptă perpendiculară pe dreapta care unește centrele celor două cercuri și se numește *axa radicală* a celor două cercuri. Sistemul format din ecuațiile (1) și (2) este echivalent cu sistemul format de ecuațiile (1) și (3) sau cu cel format de ecuațiile (2) și (3).

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau hiperbolele $\Gamma_1 : x^2 + 2xy - y^2 = 1$, $\Gamma_2 : -x^2 + 2xy + y^2 = 1$. Să se determine $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Soluție. Problema se reduce la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 1, \\ -x^2 + 2xy + y^2 = 1, \end{cases}$$

în $\mathbf{R}^2$. Scăzînd cele două ecuații rezultă $x^2 - y^2 = 0$. Astfel sistemul inițial este echivalent cu

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) = 0, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

Din $x = y$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ deducem soluțiile $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, iar $x + y = 0$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ nu au soluții comune. În concluzie, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține punctele de coordonate $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Se cer punctele comune ale cercurilor C_1: $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ și C_2: $x^2 + y^2 + y - 2 = 0$.

Soluție. Sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

este echivalent cu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0, \\ 3x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $A(0, -2)$, $B\left(-\frac{9}{10}, \frac{7}{10}\right)$.

3. Se consideră ecuația matriceală

$$A^2 + A = aI,\ a \in \mathbf{R},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve ecuația în cazul cînd toate soluțiile sînt reale.

Soluție. Ecuația devine

$$\begin{bmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \text{ sau } \begin{cases} x^2 - y^2 + x - a = 0 \\ y(2x + 1) = 0. \end{cases}$$

(i) Sistemul $x = -\frac{1}{2}$, $y^2 = -a - \frac{1}{4}$ admite soluții reale dacă $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.

(ii) Sistemul $y = 0$, $x^2 + x - a = 0$, admite soluții reale dacă $a \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

Observăm că ambele sisteme admit soluții reale numai pentru $a = -\frac{1}{4}$; în acest caz însă ambele sisteme se reduc la $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$ și deci

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notă. Ecuația $x^2 - y^2 + x - a = 0$ reprezintă o familie de hiperbole, iar ecuația $y(2x + 1) = 0$ o reuniune de două drepte.

§ 8. Aplicații în fizică și în tehnică

Elipsa de inerție. Fie un plan raportat la reperul cartezian xOy și sistemul de puncte materiale $M_1(x_1, y_1), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ avînd respectiv masele $m_1, \ldots, m_n$. *Momentul de inerție* al sistemului de puncte față de o axă de rotație h se definește prin expresia

$I_h = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$, unde d_i este distanța de la punctul M_i la axa h. Fără să afectăm generalitatea problemei putem presupune că axa de rotație este $h_0: x \cos\theta + y \sin\theta = 0$, unde θ este fixat. Rezultă $d_i = d(M_i;\ h_0) = |\, x_i \cos\theta + y_i \sin\theta \,|$ și deci

$$(1)\quad I_{h_0} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \cos\theta + y_i \sin\theta)^2 = I_y \cos^2\theta + I_{xy} \sin 2\theta + I_x \sin^2\theta, \quad \text{unde}$$

$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$, $I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$ sînt respectiv momentele față de axele Oy, Ox, iar $I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$ este *momentul centrifugal.*

Pentru $\theta \in [0, 2\pi)$ variabil se obțin toate axele de rotație posibile ce trec prin origine (fascicul de drepte). Notînd $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{I_{h_0}}}$, $a = I_y$, $b = I_{xy}$, $c = I_x$, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, relația (1) se transcrie

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1.$$

Deoarece $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ (de ce?), această ecuație reprezintă o elipsă E. În concluzie, oricare ar fi repartiția maselor $m_1, \ldots, m_n$, momentele de inerție ale sistemului de puncte $\{M_1, \ldots, M_n\}$ în raport cu axele de rotație ce trec prin origine sînt caracterizate de elipsa E, numită *elipsa de inerție a sistemului de puncte* $\{M_1, \ldots, M_n\}$ *față de punctul* O (fig. IV. 39). Elipsa de inerție joacă un rol important în mecanică și în rezistența materialelor.

Legea Boyle-Mariotte. Experiențe din fizică au dovedit că *într-un regim izoterm produsul dintre presiunea p și volumul V, ale aceleiași mase de gaz, rămîne constant.*

Dacă (p, V) sînt interpretate ca fiind coordonatele unui punct dintr-un plan raportat la reperul cartezian pOV, atunci ecuația $pV = \text{const}$, $p > 0$, $V > 0$ reprezintă o ramură a unei hiperbole echilatere (fig. IV. 40). În fizică această ramură se numește *izotermă.*

Energia potențială. Cîmpul gravitațional newtonian (cîmp de atracție) și cîmpul electrostatic coulombian (cîmp de atracție sau de respingere) au proprietatea că energia potențială U a unui punct material (de masă m în cazul cîmpului gravitațional sau de sarcină electrică q în cazul cîmpului coulombian) aflat în astfel de cîmpuri este invers proporțională cu distanța r de la origine la punctul material. Considerînd că (r, U) sînt coordo-

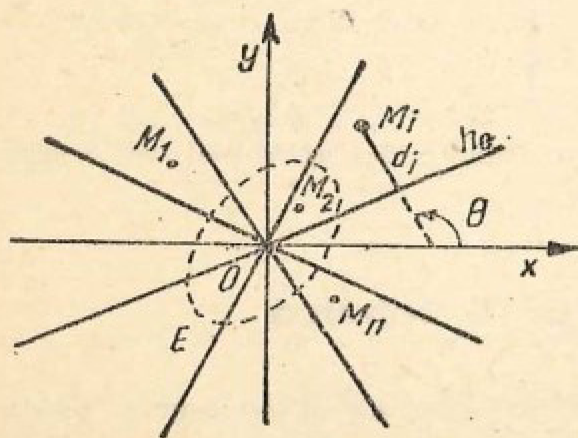


Fig. IV. 39

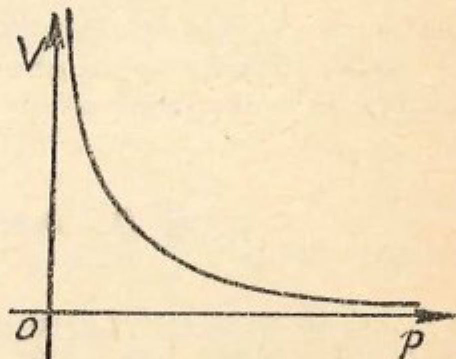


Fig. IV. 40

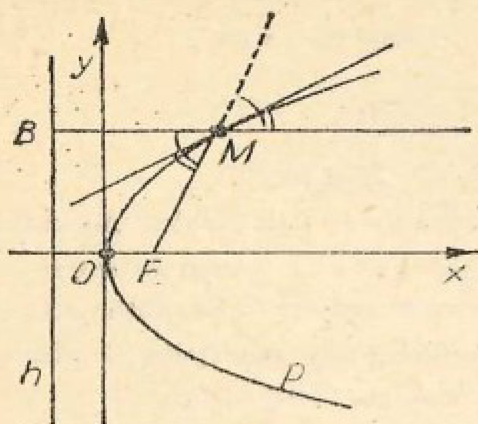


Fig. IV. 41

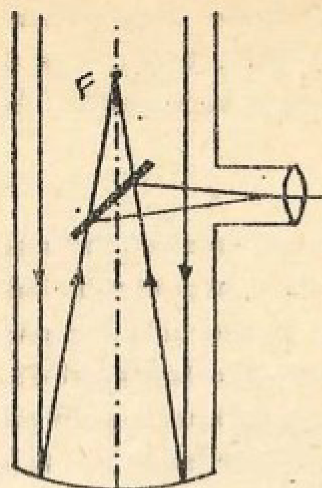


Fig. IV. 42

natele unui punct dintr-un plan raportat la reperul cartezian rOU, ecuația rU = const reprezintă o ramură a unei hiperbole echilatere situată în cadranul I dacă $U > 0$ sau în cadranul IV dacă $U < 0$, pentru cîmpul electrostatic sau numai în cadranul IV pentru cîmpul gravitațional.

Oglinzi parabolice. Fie parabola P cu directoarea h și focarul F. Tangenta la P într-un punct $M \in P$ este bisectoarea unghiului FMB, unde B este proiecția lui M pe directoarea h (fig. IV. 41). Pe această proprietate a parabolei se bazează construcția și funcționarea telescopului reflector, captatorului de radiație solară, proiectorului, farului etc. Mai precis, toate acestea folosesc oglinzi parabolice, adică oglinzi a căror suprafață este un paraboloid de rotație (suprafață obținută prin rotirea unei parabole în jurul axei de simetrie).

În cazul telescopului *reflector* (fig. IV. 42) razele de lumină ce pornesc de la un punct oarecare al unui corp ceresc, situat în direcția axei oglinzii, sînt concentrate de oglindă în focarul acesteia, iar razele ce nu sînt paralele cu axa oglinzii, dar nici prea înclinate față de axă, se concentrează în puncte din apropierea focarului. Astfel, în planul focal al oglinzii, apare imaginea răsturnată a corpului ceresc. Situația este similară în cazul instalațiilor energetice solare care folosesc efectul termic al radiațiilor solare concentrate în „puncte" cu ajutorul unor oglinzi parabolice.

În cazul proiectorului (fig. IV. 43), sursa de lumină puternică se așază în focarul oglinzii parabolice. Fasciculul de raze cu vîrful în focar este reflectat de oglindă și transformat într-un fascicul de raze paralele cu axa oglinzii. Cazul farurilor este analog.

Menționăm că pe lîngă oglinzile parabolice o mare aplicabilitate o au și oglinzile sferice, elipsoidale și hiperbolice.

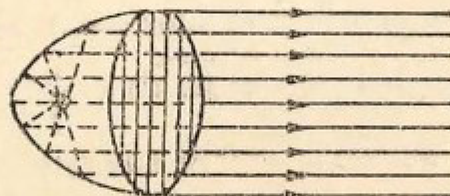


Fig. IV. 43

Traiectorii într-un cîmp central. În cîmpul gravitațional newtonian, ca și în cîmpul electrostatic coulombian, traiectoria descrisă de un punct material este o conică cu focarul în origine. În coordonatele polare (r, θ) ecuația acestei conice este

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

unde p este un parametru, iar e este excentricitatea conicei.

Dacă $e \in (0, 1)$ atunci punctul material se mișcă pe o elipsă și deci mișcarea este finită. Pentru $e = 1$, traiectoria este o parabolă, iar pentru $e \in (1, \infty)$ traiectoria este o hiperbolă. Această teorie fizică este legată de probleme concrete: mișcarea planetelor în jurul soarelui și legile lui Kepler, lansarea de pe suprafața pămîntului a sateliților artificiali și a rachetelor, mișcarea electronilor în cîmpul electrostatic al nucleelor etc.

§ 9. Probleme propuse

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu vîrfurile $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(b, 0)$, $a, b > 0$.

1) Să se scrie ecuația cercului Γ circumscris triunghiului AOB.

2) Să se arate că tangenta în origine la cercul Γ este perpendiculară pe AC.

3) Notînd cu M un punct mobil pe cercul Γ, se cere locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABM.

R. 1) $x^2 + y^2 + bx - ay = 0$. 2) Ecuația tangentei în origine la cercul Γ este $bx - ay = 0$, iar a dreptei AC este $ax + by - ab = 0$. 3) $x^2 + y^2 + bx - ay + \frac{2}{9}(a^2 + b^2) = 0$.

2. Se consideră dreapta d: $3x - 4y + 4 = 0$.

1) Să se scrie ecuația bisectoarei b, a unghiului ascuțit format de dreapta d cu axa Oy.

2) Să se scrie ecuația cercului C, ce trece prin origine, tangent în origine dreptei $y = mx$, $m \in \mathbf{R} - \{0\}$ și care mai trece prin punctul de intersecție dintre bisectoarea b cu axa Ox.

3) Presupunînd m variabil, să se găsească locul geometric descris de centrul cercului C.

R. 1) $b: 2x - y + 1 = 0$; 2) $C: x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2m}y = 0$, $m \neq 0$; 3) $x = -\frac{1}{4}$.

3. Într-un reper cartezian se dau dreptele

d: $2tx - (t + 1)y = 3t - 1$,

d': $(3t + 1)x + (t - 1)y = 6t - 2$, $t \in \mathbf{R}$.

1) Să se arate că dreapta d trece printr-un punct fix A și că dreapta d' trece printr-un punct fix B.

2) Să se calculeze unghiul orientat al dreptelor d, d'.

3) Să se arate că punctul M, comun dreptelor d și d', aparține unui cerc fix.

R. 1) $A(2, 1)$, $B(1, 3)$. 2) $\widehat{(d, d')} = \frac{\pi}{4}$. 3) $C: x^2 + y^2 - x - 3y = 0$.

4. Graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ se numește *clopot Gauss* (fig. IV. 44). Să se găsească intersecția dintre clopotul Gauss și cercul cu centrul în origine și de rază unu. Să se arate că cele două curbe au aceeași tangentă în punctul de contact de pe axa Oy.

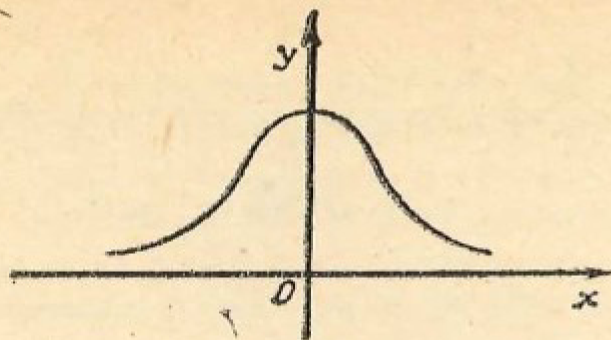


Fig. IV. 44

Indicație. Se rezolvă sistemul $y = e^{-x^2}$, $x^2 + y^2 = 1$. Tangenta la graficul unei funcții derivabile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, în punctul $(x_0, f(x_0))$, are ecuația $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

5. Fie elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MFF', unde M este un punct mobil pe elipsă, iar F și F' cele două focare.

R. $E_1: \frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2} - 1 = 0.$

6. Se dă un cerc C, cu diametrul $[AB]$, de lungime $2r$, $r \in (0, \infty)$. Fie Γ un cerc, cu centrul variabil $M \in C$ și tangent în N la $[AB]$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție dintre dreapta MN cu coarda comună a cercurilor C și Γ.

R. $E: \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} - 1 = 0.$

7. Se dă elipsa $E: x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

1) Să se scrie ecuația tangentei la E în punctul $T\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa E, paralele cu normala la E ce trece prin T.

3) Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din $P(3, -1)$ la elipsa E.

Indicație. 1) Prin dedublare. 2) Se utilizează ecuația fasciculului de drepte paralele. 3) Se folosește sistemul

$$\begin{cases} r(x - 3) + s(y + 1) = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \qquad r^2 + s^2 \neq 0. \end{cases}$$

8. Se dă elipsa $E: \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ și dreapta $d_n: y = x + n$, $n \in \mathbf{R}$, care intersectează elipsa în punctele P și Q.

1) Să se scrie ecuația cercului C de diametru $[PQ]$.

2) Fie $\{S, T\} \subset C \cap E$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor PQ și ST cînd n este variabil.

Indicație. 1) $C: \left(x + \frac{n}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4n}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}(5 - n^2)$, $n \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

2) $ST: y + x - \frac{5n}{3} = 0$, $n \in \left[-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right]$ și deci locul geometric este segmentul $y = 4x$, $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$.

9. Se dă hiperbola

$$H: x^2 - 2y^2 - 2 = 0.$$

1) Să se găsească ecuația tangentei la H în punctul $M_0(2, 1)$.

2) Există tangente la H paralele cu normala la H în M_0?

3) Să se scrie ecuațiile tangentelor la H duse din $A(0, 1)$.

10. Se consideră hiperbola H și un punct P în planul acesteia. Prin P se duc paralele la asimptotele hiperbolei H. Fie M, N punctele de intersecție ale acestor paralele cu hiperbola.

1) Care este locul geometric al punctelor P care au proprietatea că dreapta MN trece prin centrul O al hiperbolei H?

2) Care este locul geometric al punctelor P pentru care dreapta MN este paralelă cu una din axele hiperbolei?

R. 1) hiperbola conjugată lui H, 2) axa Ox, respectiv axa Oy.

11. Fie hiperbola echilateră $H: x^2 - y^2 = a^2$ cu vîrfurile A, B și o dreaptă variabilă paralelă cu axa Ox care taie pe H în C și D. Notăm $\{M\} = CB \cap AD$. Să se determine locul geometric al punctului M.

R. Segmentul $x = 0$, $y \in (-a, a)$.

12. Fie x și y coordonatele unui punct M în raport cu un reper cartezian. Să se expliciteze și să se reprezinte mulțimea

$$\Gamma: \frac{x\,|x|}{4} + \frac{y\,|y|}{9} = 1.$$

13. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^2}{4} - 1\right|}$.

14. În planul raportat la un reper cartezian se consideră parabola $P: 2y = x^2$. Fie M un punct pe parabolă. Să se determine, în funcție de abscisa m a lui M:

1) coordonatele punctului T unde tangenta în M la P taie axa Ox, aria triunghiului OTM și coordonatele centrului de greutate G al aceluiași triunghi.

2) locul geometric al punctului G cînd M descrie parabola dată.

Să se arate că înălțimea triunghiului OTM corespunzătoare vîrfului T trece printr-un punct fix:

R. 1) $T\left(\frac{m}{2}, 0\right)$, aria $(OTM) = \frac{m^3}{8}$, $G\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{6}\right)$. 2) Parabola: $x = \frac{m}{2}$, $y = \frac{m^2}{6}$, $m \in \mathbf{R}$. Punctul fix $A(0, 1)$.

15. Să se determine regiunile din planul xOy, unde trebuie să se găsească punctul $M(x, y)$, astfel ca ecuația $16t^2 + 4(x - 5)t + y - 3x + 5 = 0$ în $t \in \mathbf{R}$, să aibă:

1) O rădăcină cuprinsă între 0 și 1.

2) Ambele rădăcini cuprinse între 0 și 1.

Indicație. Ecuația are rădăcini reale dacă $x^2 + 2x - 4y + 5 \geqslant 0$. Apartenența la $[0, 1]$ adaugă 1) $(y - 3x + 5)(x + y + 1) \leqslant 0$ respectiv 2) $y - 3x + 5 \geqslant 0$, $x + y + 1 \geqslant 0$, $0 \leqslant \frac{5 - x}{8} \leqslant 1$.

16. Să se figureze mulțimea punctelor M ale căror coordonate satisfac sistemul $x^2 + y^2 = 1$, $2y^2 + x - 1 > 0$.



Fig. IV. 45

17. Pentru a pili vîrful unui corp ascuțit prins într-o menghină (fig. IV. 45) se apasă pila la cele două capete cu forțele $\bar{f}_1$ și $\bar{f}_2$ care fac cu direcția pilei unghiuri de 30° și respectiv 60°. Cunoscînd lungimea pilei $l = 25$ cm, $\|\bar{f}_1\| = 80$ N și neglijînd greutatea proprie a pilei, să se determine felul în care trebuie să varieze mărimea forței $\bar{f}_2$ astfel încît pila să-și păstreze orizontalitatea în timpul lucrului.

Indicație. Se impune egalitatea momentelor forțelor $\bar{f}_1$ și $\bar{f}_2$ față de punctul de contact al pilei cu corpul de pilit. Rezultă

$$\|\bar{f}_2\| = 46,24 \frac{x}{25 - x}, \quad x \in [a, \ b] \subset (0, \ l).$$

Graficul este un arc de hiperbolă.

18. Fie elipsa (hiperbola sau parabola) Γ, fie punctul $M \in \Gamma$ și o dreaptă d care nu trece prin M. Fie MN (fig. IV. 46) o dreaptă care taie pe d în L (dacă $M = N$, dreapta MN este trangenta la Γ în punctul M). Să se arate că există un punct $A \in \Gamma$ cu proprietatea că funcția f: $\Gamma - \{A\} \to d$, $f(N) = L$ este bijectivă (injectivă).

Indicație. A este punctul pentru care $MA \parallel d$.

19. Să se discute poziția cercurilor

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 - \alpha^2,$$
$$C_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1 - \alpha^2, \alpha \in \mathbf{R}.$$

Indicație. Se vor considera cazurile: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha \in (-1, 1)$; 3) $\alpha \in \{-1, +1\}$; 4) $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

20. Se dă egalitatea $(y - x)t^2 - 2yt + x + y + 1 = 0$, unde $t \in \mathbf{R}$, iar (x, y) sînt coordonatele unui punct din plan. Considerînd pe t drept necunoscută, să se determine semnul rădăcinilor acestei ecuații.

21. Printre perechile (x, y) de numere reale care satisfac inegalitățile $y - x \leqslant 1$, $y + x \leqslant 1$, $y \geqslant x^2 - 1$ să se determine acelea pentru care y este maxim sau minim.

R. $(0, 1)$, $(0, -1)$.

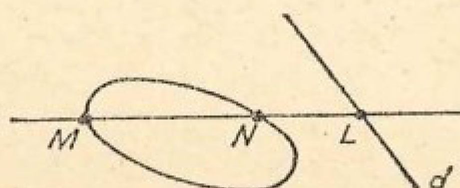


Fig. IV. 46

22. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ sistemele de ecuații

1) $\begin{cases} (x + y - 1)(x^2 + y^2 - 6x) = 0, \\ (x + y - 1)(x^2 + y^2 - 8x) = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 70, \\ 6x^2 + xy - y^2 = 50; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3xy - 2(x + y) = 28, \\ 2xy - 3(x - y) = 14; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y^2 = ax, \\ y + x^2 = by \end{cases}$

şi să se interpreteze geometric rezultatele găsite.

CUPRINS

